

LÊ HẢI CHÂU - NGUYỄN XUÂN QUỲ

# BÀI TOÁN QUỲ TÍCH

dễ hay khó?



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



LÊ HẢI CHÂU - NGUYỄN XUÂN QUỲ

Bài toán  
**QUỲ TÍCH**  
*DỄ HAY KHÓ?*

*[www.facebook/otoanhoc2911](http://www.facebook/otoanhoc2911)*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI-2001



## Vài dòng mở đầu

Tiếp theo cuốn "Bài toán Dựng hình dễ hay khó", cuốn "Bài toán Quỹ tích dễ hay khó" này nhằm đáp ứng yêu cầu cung cấp những kiến thức cần thiết trong việc giải một bài toán quỹ tích.

Cuốn sách gồm ba chương. Chương I đề cập một số vấn đề chung như quỹ tích là gì, các quỹ tích cơ bản, các bước giải một bài toán quỹ tích. Chương II trình bày những bài toán quỹ tích (không xét giới hạn) mà quỹ tích là đường thẳng, đường tròn. Chương III trình bày những bài toán quỹ tích (có xét giới hạn) mà quỹ tích là đoạn thẳng, cung tròn.

Mỗi bài toán đều nêu rõ hướng dẫn và cách giải theo thứ tự: phân thuận, giới hạn, phần đảo, kết luận.

Cuối mỗi chương II và III có nêu lên mối quan hệ khăng khít giữa bài toán quỹ tích và bài toán dựng hình kèm theo một số bài toán minh họa.

Cuối sách là mục "Bạn có biết..." nhằm mở rộng kiến thức về quỹ tích và gây hứng thú trong việc học toán.

Các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh có thể sử dụng cuốn sách này để hướng dẫn học sinh, con em mình rèn luyện phương pháp học toán sao cho đạt kết quả tốt nhất.

Hà Nội mùa hè 2001

Các tác giả



# Chương I

## MỘT SỐ VẤN ĐỀ CHUNG

### 1. Quỹ tích là gì?

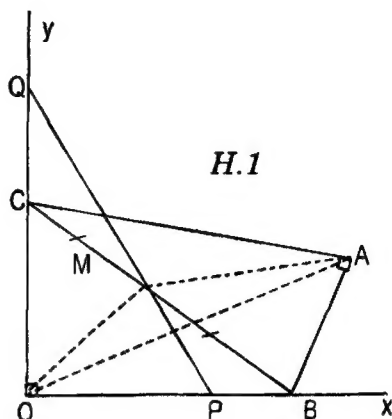
Quỹ tích là tập hợp những điểm có một số tính chất chung nào đó và chỉ những điểm có tính chất đó mà thôi.

Một số hình theo định nghĩa đã là quỹ tích, chẳng hạn đường tròn là quỹ tích các điểm cách một điểm cố định một khoảng cách không đổi.

### 2. Các quỹ tích cơ bản

1) *Quỹ tích các điểm cách đều hai điểm A, B là đường trung trực của đoạn thẳng AB.*

*Ví dụ:* Cho điểm A cố định nằm trong góc vuông  $xOy$ . Xét tam giác vuông có đỉnh góc vuông là A và hai đầu cạnh huyền BC chạy trên hai cạnh Ox và Oy của góc  $xOy$ . Tìm quỹ tích trung điểm M của cạnh huyền BC (hình 1). Nối



MO, MA và OA. Do các góc tại A và O đều vuông nên  $MO = MA$  (vì cùng bằng nửa cạnh huyền BC). Vì hai điểm O và A cố định mà M cách đều O và A nên quỹ tích của M là đường trung trực của đoạn thẳng OA.

Nhưng điểm A nằm trong góc  $xOy$  nên quỹ tích của M

chỉ là đoạn thẳng PQ nằm trong góc xOy ( $P \in Ox, Q \in Oy$ ).

2) *Quỹ tích các điểm nằm trong góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc ấy.*

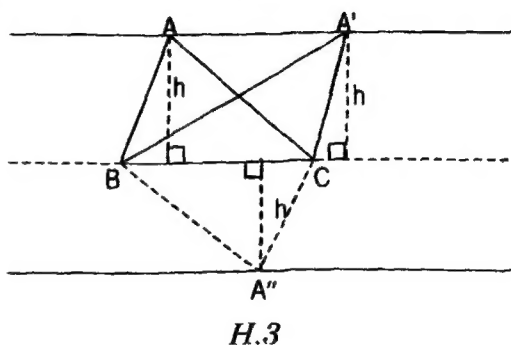
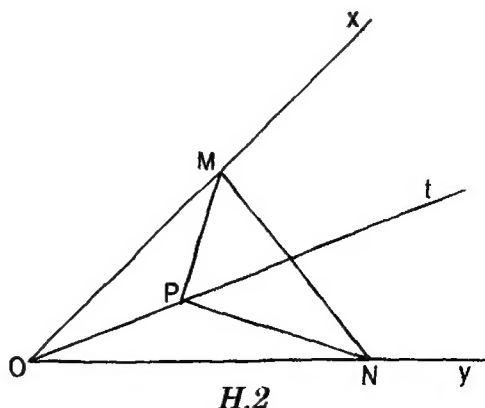
*Ví dụ:* Cho góc xOy. Một đường thẳng di động cắt Ox ở M và Oy ở N. Tìm quỹ tích giao điểm P các đường phân giác của hai góc M và N (hình 2).

Ba tia phân giác của ba góc  $\hat{O}$ ,  $\hat{M}$  và  $\hat{N}$  trong tam giác OMN cắt nhau tại một điểm P. Do đó quỹ tích giao điểm P là tia phân giác Ot (hình 2) của góc xOy.

3) *Quỹ tích những điểm cách một đường thẳng cho trước một khoảng l cho trước gồm hai đường thẳng song song với đường thẳng đã cho và cách đường thẳng đó một khoảng l đã cho.*

*Ví dụ.* Một tam giác biến thiên ABC có đáy BC cố định và diện tích không đổi. Tìm quỹ tích đỉnh A (hình 3).

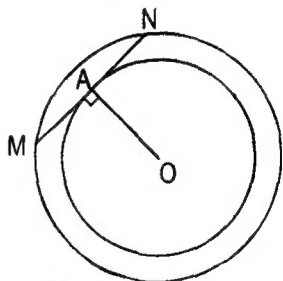
Do BC cố định và diện tích tam giác không đổi, nên quỹ tích đỉnh A là 2 đường thẳng song song với đường thẳng BC và cách nó một khoảng bằng h. (h là độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của  $\triangle ABC$ ).





4) Quỹ tích các điểm  $M$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$  trong đó  $AB$  là một đoạn thẳng cho trước, là đường tròn  $(I, \frac{AB}{2})$  với  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

Ví dụ. Cho đường tròn  $(O)$  tìm quỹ tích các trung điểm  $A$  của tất cả dây cung  $MN = a$  ( $a$  là một độ dài cho trước) của  $(O)$  (hình 4). Nếu  $M$  cố định và dây cung  $MN$  thay đổi thì quỹ tích của  $A$  là gì?

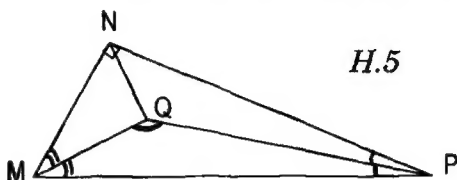


H.4

Kẻ  $OA \perp MN$  mà  $MN = a$  không đổi nên khoảng cách  $OA$  cũng không đổi. Vậy quỹ tích của  $A$  là đường tròn tâm  $O$  bán kính  $OA$  không đổi.

Nếu  $M$  cố định và  $O$  cố định thì quỹ tích của  $A$  sẽ là đường tròn đường kính  $OM$ .

5) Quỹ tích các điểm  $M$  tạo thành với hai mút của đoạn thẳng  $AM$  cho trước một góc không đổi  $\widehat{AMB} = \alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) là hai cung tròn đối xứng nhau qua  $AB$  gọi là cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn thẳng  $AB$ .



H.5

Ví dụ. Gọi  $Q$  là giao điểm ba phân giác trong của tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$  có cạnh huyền cố định. Tìm quỹ tích của  $Q$  (hình 5).

Ta có  $\widehat{M} + \widehat{P} = 90^\circ$  mà  $MQ$  và  $PQ$  theo thứ tự là phân giác các góc  $M$  và  $P$  nên  $\widehat{MQP} = 180^\circ - \frac{\widehat{M} + \widehat{P}}{2} = 135^\circ$ .

Vậy quỹ tích của  $Q$  là hai cung chứa góc  $135^\circ$  dựng trên cạnh huyền cố định  $MP$  và đối xứng nhau qua  $MP$ .

6) Quỹ tích các điểm  $M$  mà tỉ số các khoảng cách đến hai

điểm A và B cố định bằng một số không đổi  $k \neq 1$  là một đường tròn gọi là đường tròn Apôlôniut.

Ví dụ. Cho hai đường tròn (O) và (O') bán kính R và R'. Một điểm M chuyển động sao cho các tiếp tuyến MA và MB của đường tròn (O), MA' và MB' của đường tròn (O') thoả mãn  $\widehat{AMB} = \widehat{A'MB'}$ . Tìm quỹ tích của điểm M (hình 6).

Nối MO, MO', AO và A'O'. Do  $\widehat{AMO} = \frac{1}{2}\widehat{AMB}$  và

$$\widehat{A'MO'} = \frac{1}{2}\widehat{A'MB'}$$

$\widehat{AMO} = \widehat{A'MO'}$ . Lại có:

$\widehat{MAO} = \widehat{MA'O'} = 90^\circ$  (vì các tiếp tuyến vuông góc với bán kính qua tiếp điểm).

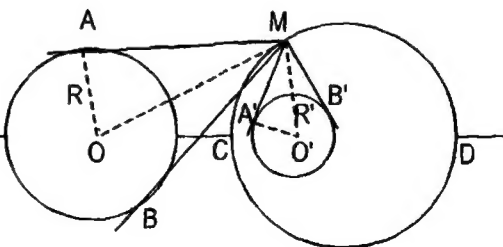
Suy ra hai tam giác MAO và MA'O'

đồng dạng nên tỉ số  $\frac{MO}{MO'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{R}{R'}$  không đổi.

Vậy quỹ tích của M là đường tròn có đường kính là đoạn thẳng nối hai điểm C và D chia trong và chia ngoài đoạn thẳng đó theo tỉ số  $\frac{R}{R'}$  không đổi.

7) Quỹ tích các điểm M có tổng các bình phương của hai khoảng cách đến hai điểm cố định A và B cho trước là một giá trị không đổi:  $MA^2 + MB^2 = k^2$  là một đường tròn có tâm là trung điểm của AB và bán kính bằng  $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ .

Ví dụ. Từ điểm P cố định nằm trong đường tròn (O, r) kẻ hai đoạn thẳng biến thiên PA và PB vuông góc với nhau (A và B nằm trên đường tròn). Tìm quỹ tích trung điểm của



H.6

dây cung AB (hình 7).

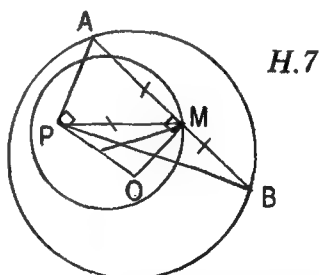
Nối PM, PO, AO và BO.

Do M là trung điểm của cạnh huyền AB trong tam giác vuông APB nên  $MA = MB$ . Vì  $OM \perp AB$  (bán kính qua trung điểm của một dây cung) nên  $\widehat{OMA} = 90^\circ$ .

Ta có  $MP^2 + MO^2 = MA^2 + MO^2 = OA^2 = r^2$  không đổi.

Như thế tổng các bình phương của hai khoảng cách từ M tới P và O bằng  $r^2$ . Vậy quỹ tích của M là đường tròn có tâm là trung điểm của OP và bán kính bằng

$$\frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - OP^2}.$$

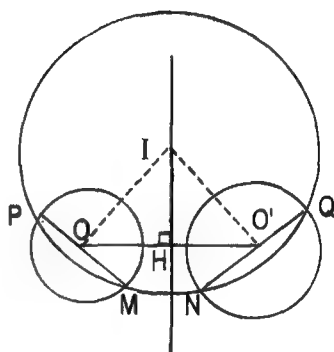


8) Quỹ tích các điểm M có hiệu các bình phương của hai khoảng cách đến hai điểm cố định là một giá trị không đổi:  $|MA^2 - MB^2| = k^2$  là một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại điểm H cách trung điểm O của AB một khoảng  $\overline{OH} = \frac{k^2}{2AB}$ .

Ví dụ. Cho hai đường tròn (O) và (O') bán kính R và R'. Một đường tròn biến thiên (I) chia đường tròn (O) thành hai phần bằng nhau tại M và P, chia đường tròn (O') thành hai phần bằng nhau tại N và Q. Tìm quỹ tích tâm (I) (hình 8).

Theo bài ra, MP và NQ là các đường kính của hai đường tròn (O) và (O') nên  $IO \perp MP$  và  $IO' \perp NQ$ .

Giả sử đường tròn (O') lớn hơn đường tròn (O) ta có:



H.8

$IO^2 \cdot IO'^2 = (IM^2 - OM^2) \cdot (IN^2 - O'N^2) = O'N^2 \cdot OM^2 = R'^2 \cdot R^2$   
không đổi.

Vậy quỹ tích tâm I là đường thẳng vuông góc với  $OO'$  tại điểm H cách trung điểm S của  $OO'$  một khoảng

$$SH = \frac{R'^2 - R^2}{2.OO'}.$$

### 3. Các bước giải một bài toán quỹ tích

1) Ta hãy xét 4 loại mệnh đề sau đây:

(a) Mệnh đề thuận: có A thì có B ( $A \Rightarrow B$ )

(b) Mệnh đề đảo: có B thì có A ( $B \Rightarrow A$ )

(c) Mệnh đề phản: không A thì không B ( $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ )

(d) Mệnh đề phản đảo: không B thì không A ( $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ ).

Ta thấy ngay rằng:

- Giả thiết của (b) là kết luận của (a), kết luận của (b) là giả thiết của (a);

- Giả thiết của (c) là phủ định giả thiết của (a), kết luận của (c) là phủ định kết luận của (a);

- Giả thiết của (d) là phủ định kết luận của (a), kết luận của (d) là phủ định giả thiết của (a).

Hai mệnh đề thuận (a) và phản đảo (d) là tương đương, hai mệnh đề đảo (b) và phản (c) là tương đương. Như vậy cặp mệnh đề thuận và phản đảo cùng đúng hoặc sai, cặp mệnh đề đảo và phản cũng cùng đúng hoặc cùng sai.

Thuận  $\Leftrightarrow$  Phản đảo

Đảo  $\Leftrightarrow$  Phản.

2) Khi giải một toán quỹ tích ta phải chứng minh cả phần thuận và phần đảo.

- Phần thuận:

Những điểm có tính chất T thì nằm trên hình H.

*- Phần đảo:*

Những điểm nằm trên hình H thì có tính chất T.

Có thể coi phần thuận là điều kiện cần và phần đảo là điều kiện đủ.

Chẳng hạn xét quỹ tích cơ bản: "Quỹ tích những điểm cách đều hai điểm cố định A và B là đường trung trực của AB".

a) Ta chứng minh rằng mọi điểm cách đều A và B phải nằm trên đường trung trực của AB (thuận).

b) Đảo lại, mọi điểm nằm trên đường trung trực của AB thì cách đều A và B (đảo).

Nếu không có phần đảo thì quỹ tích có thể chỉ là một đoạn của đường trung trực của AB.

*Chú ý:* Khi một điểm cách đều hai điểm cho trước A và B thì nó nằm trên đường trung trực của AB, chẳng hạn tâm của đường tròn đi qua hai điểm cho trước.

Nếu ta biết hai điểm C và D cách đều A và B thì chúng phải nằm trên đường trung trực của AB, và do hai điểm là đủ để xác định một đường thẳng nên khi nối C và D bằng một đường thẳng thì ta sẽ được đường trung trực của AB.

*Ví dụ:* a) Đường thẳng nối tâm của một đường tròn với trung điểm của một cung tròn là đường trung trực của dây trương cung đó.

b) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn cắt nhau là đường trung trực của dây cung chung.

c) Muốn chia một đoạn thẳng AB thành hai phần bằng nhau ta xác định hai điểm C và D cùng cách đều A và B rồi kẻ đường thẳng CD (nên lấy hai điểm C và D xa nhau hoặc ở hai bên đoạn thẳng AB).

3) Trong mỗi bài toán quỹ tích thường có hai loại yếu tố:

*yếu tố cố định và yếu tố chuyển động.*

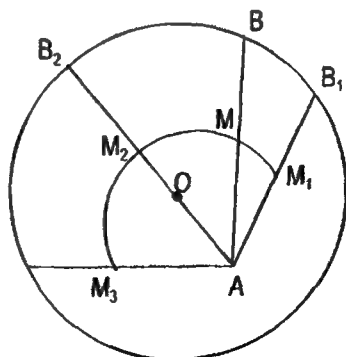
Việc tìm ra mối liên hệ giữa hai yếu tố đó là khâu chủ yếu giúp ta giải bài toán quỹ tích. Ta hãy minh họa điều này bằng ví dụ sau:

"Cho một điểm A cố định nằm trong đường tròn (O; R) và một điểm B chuyển động trên (O; R). Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn AB".

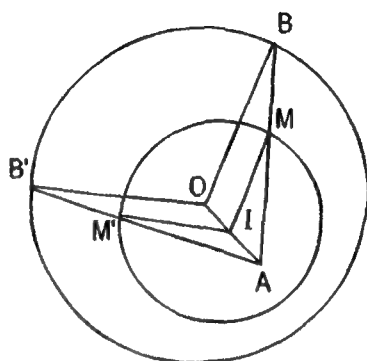
Trong bài toán này yếu tố cố định là các điểm O, A và độ dài bán kính R, yếu tố chuyển động là các điểm B và M.

Trước hết ta hãy xét vài vị trí của B trên đường tròn (O), chẳng hạn B lần lượt ở  $B_1, B_2, B_3$  để phỏng đoán xem các trung điểm M,  $M_1, M_2, M_3$  sẽ nằm trên đường thẳng hoặc đường tròn (hình 9a). Trên hình vẽ ta thấy rằng có thể M sẽ nằm trên một đường tròn nào đó.

Từ đó nghĩ đến việc tìm sự liên hệ giữa hai loại yếu tố cố định và chuyển động. Do O, A cố định và M là trung



(a)



(b)

điểm cạnh AB trong  $\triangle OAB$  nên nghĩ ngay đến đường trung bình của tam giác, tức là xác định thêm điểm I trung điểm của cạnh OA. I là điểm cố

định. Như thế IM là đường trung bình trong  $\triangle OAB$  nên  $IM = \frac{1}{2} OB =$  không đổi.

Vậy M phải nằm trên đường tròn tâm I cố định bán kính  $\frac{R}{2}$ .

Ta trình bày cách giải như sau:

*Phần thuận:* Do đoạn OA cố định nên trung điểm I của nó cũng cố định. Trong tam giác OAB, IM là đường trung bình nên  $IM = \frac{1}{2} OB = \frac{R}{2}$  không đổi. Điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi, vậy M sẽ nằm trên đường tròn  $(I, \frac{R}{2})$ .

*Phần đảo.* Gọi M' là một điểm tùy ý của đường tròn  $(I, \frac{R}{2})$  ta phải chứng minh rằng có một điểm B' để đoạn AB' nhận M' là trung điểm.

Thật vậy, nối AM' rồi kéo dài cắt (O) tại B'. Trong  $\triangle OB'A$  do  $IM' = \frac{R}{2} = \frac{OB'}{2}$  và I là trung điểm của OA nên IM' là đường trung bình của tam giác này, do đó M' là trung điểm của AB'.

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I trung điểm của OA, bán kính bằng  $\frac{R}{2}$ .

#### 4) Giới hạn của quỹ tích

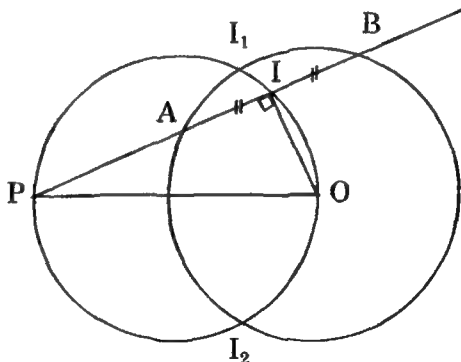
Ta hãy xét bài toán sau đây:

"Cho đường tròn (O) và điểm P cố định ở ngoài đường tròn. Một cát tuyến thay đổi qua P cắt (O) tại hai điểm A và B. Tìm quỹ tích trung điểm I của AB" (hình 10).

Do I là trung điểm của AB nên  $OI \perp AB$ . Điểm I nhìn

đoạn  $OP$  cố định dưới một góc vuông nên  $I$  nằm trên đường tròn đường kính  $OP$  (thuận).

*Nhận xét:* Vì  $I$  là trung điểm của dây cung  $AB$  nên  $I$  không thể nằm ngoài đường tròn  $(O)$  mà phải nằm trong  $(O)$ , tức là nằm trên cung nhỏ  $I_1I_2$  của đường tròn đường kính  $OP$ ,  $I_1$  và  $I_2$  là giao điểm của đường tròn  $(O)$  với đường tròn đường kính  $OP$ .



H.10

Để chứng minh phần đảo ta phải lấy một điểm  $I'$  tùy ý trên cung  $I_1I_2$  (chứ không phải lấy  $I'$  tùy ý trên đường tròn đường kính  $OP$  vì  $I'$  phải nằm trong  $(O)$ ). Nối  $P$  với  $I'$  đường thẳng  $PI'$  cắt  $(O)$  tại  $A'$  và  $B'$ , ta phải chứng minh rằng  $I'$  là trung điểm của dây cung  $A'B'$ . Thật vậy do góc  $OI'P$  vuông tức là  $OI' \perp A'B'$  nên  $I'$  là trung điểm của dây cung  $A'B'$ .

Thành thử cách giải bài toán quỹ tích này sẽ như sau:

- *Phần thuận:*  $I$  là trung điểm của  $AB$  thì  $I$  sẽ nằm trên đường tròn đường kính  $OP$ .

Giới hạn.  $I$  phải nằm trên cung  $I_1I_2$  phía trong đường tròn  $(O)$ .

- *Phần đảo:*  $I'$  là điểm tùy ý nằm trên cung  $I_1I_2$  phía trong  $(O)$  thì  $I'$  là trung điểm của dây cung  $A'B'$  thuộc cát tuyến  $PA'B'$ .

Kết luận: Quỹ tích của  $I$  là cung  $I_1I_2$  thuộc đường tròn đường kính  $OP$  nằm phía trong đường tròn  $(O)$ .

5) Tóm lại, các bước để giải một bài toán quỹ tích là:



. Nếu bài toán không xét giới hạn quỹ tích thì phải chứng minh hai phần thuận và đảo.

- Nếu bài toán có xét giới hạn quỹ tích thì phải chứng minh:

- Phần thuận, giới hạn;

- Phần đảo, kết luận.

#### **4. Phương pháp quỹ tích tương giao**

1) *Phương pháp rất tổng quát này được dùng khi cách giải của một bài toán hình học quy về xác định một điểm. Chẳng hạn muốn vẽ một đường tròn ta phải tìm tâm của nó, muốn dựng một hình bất kì ta tìm cách xác định một tam giác luôn gắn liền với hình đó và để có tam giác ta đặt một cạnh, một trung tuyến, v.v... có độ dài cho trước và tìm một đỉnh.*

*Nguyên tắc của phương pháp này là: Điểm cần tìm phải thoả mãn một số điều kiện. Bỏ qua một trong các điều kiện thì điểm cần tìm ở trên một quỹ tích  $H$ . Lấy lại điều kiện thứ nhất và bỏ qua điều kiện khác thì điểm cần tìm lại ở trên một quỹ tích  $H'$ . Do đó điểm cần tìm vừa phải ở trên  $H$  vừa phải ở trên  $H'$  nên phải là giao điểm của hai quỹ tích  $H$  và  $H'$ .*

Nhờ phương pháp này mà việc biện luận bài toán được dễ dàng, tức là giúp ta nghiên cứu được tất cả trường hợp có thể xảy ra. Do  $H$  và  $H'$  là đường thẳng hoặc đường tròn nên có những nguyên tắc tổng quát sau:

*Trường hợp thứ nhất:  $H$  và  $H'$  đều là đường thẳng.*

Nói chung có một nghiệm. bài toán vô nghiệm nếu  $H$  và  $H'$  song song với nhau và có vô số nghiệm nếu  $H$  và  $H'$  trùng nhau.

*Trường hợp thứ hai:*  $H$  là đường thẳng và  $H'$  là đường tròn.

Gọi  $d$  là khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng và  $R$  là bán kính đường tròn.

Bài toán có 2 nghiệm nếu  $d < R$ , có một nghiệm nếu  $d = R$  và vô nghiệm nếu  $d > R$ .

*Trường hợp thứ ba:*  $H$  và  $H'$  đều là đường tròn.

Bài toán có 2 nghiệm nếu khoảng cách giữa hai tâm bao hàm giữa hiệu và tổng hai bán kính, có 1 nghiệm trong trường hợp giới hạn (trừ khi  $H$  và  $H'$  trùng nhau) và vô nghiệm trong các trường hợp khác.

*2) Một số ví dụ minh họa phương pháp này.*

*Ví dụ 1.* Tìm trên một đường thẳng  $d$  một điểm  $M$  cách đều hai đường thẳng  $m$  và  $n$  cho trước.

Đường thẳng  $d$  là quỹ tích đầu tiên  $H$  của điểm  $M$ . Bỏ qua  $d$ , điểm  $M$  phải ở trên quỹ tích những điểm cách đều  $m$  và  $n$ . Ở đây có 2 trường hợp phải xét:

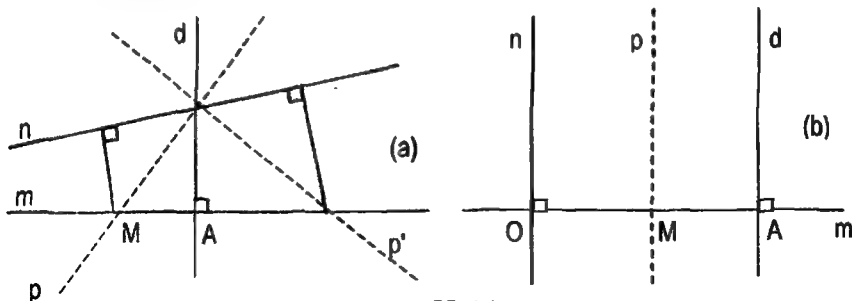
a)  $m$  và  $n$  cắt nhau. Quỹ tích  $H'$  gồm hai phân giác  $p$  và  $p'$  và  $M$  là giao điểm của hai phân giác này với  $d$ .

Nói chung bài toán có 2 nghiệm. Bài toán chỉ có 1 nghiệm nếu  $d$  song song với một trong hai phân giác  $p$  hoặc  $p'$  và  $d$  sẽ vuông góc với phân giác kia. Khi đó  $d$  tạo với  $m$  và  $n$  một tam giác cân.

Nếu  $d$  trùng với một trong hai phân giác thì có vô số nghiệm. Khi đó  $d$  sẽ là phân giác của một trong các góc do  $m$  và  $n$  tạo thành.

b)  $m$  và  $n$  song song. Quỹ tích thứ hai  $H'$  sẽ là đường thẳng song song cách đều  $p$ . Bài toán có 1 nghiệm nếu  $d$  và  $p$  cắt nhau, vô nghiệm nếu  $d$  và  $p$  song song, khi đó  $d$  sẽ song song với  $m$  và  $n$ , có vô số nghiệm nếu  $d$  trùng với  $p$ , khi đó  $d$  sẽ là đường thẳng song song và cách đều  $m$  và  $n$ .

**Ví dụ 2.** Cho hai đường thẳng  $m$  và  $n$  và một điểm  $A$  trên đường thẳng  $m$ . Tìm trên  $m$  một điểm  $M$  cách đều  $A$  và đường thẳng  $n$ . Nếu từ điểm  $A$  ta kẻ đường thẳng  $d$  vuông góc với  $m$  thì điểm  $M$  sẽ cách đều các đường thẳng  $n$  và  $d$ . Điểm  $M$  phải tìm là giao điểm của  $m$  và của quỹ tích những điểm cách đều  $n$  và  $d$  vuông góc với  $m$  tại  $A$ .



H.11

Để xác định quỹ tích thứ hai ta xét 2 trường hợp:

a)  $d$  và  $n$  cắt nhau. Khi đó  $n$  không vuông góc với  $m$  (hình 11a).

Quỹ tích sẽ là hai phân giác  $p$  và  $p'$ , bài toán luôn có 2 nghiệm hình vì  $m$  không thể song song với  $p'$  mà không vuông góc với  $p$ , vô lý.

b)  $d$  và  $n$  song song (hình 11b). Khi đó  $m$  và  $n$  vuông góc với nhau.

Quỹ tích thứ hai là một đường thẳng  $p$  song song và cách đều  $d$  và  $n$ . Chỉ có 1 điểm  $M$  duy nhất, đó là trung điểm của  $OA$ .

*Lưu ý.* Đây cũng là cách giải bài toán sau:

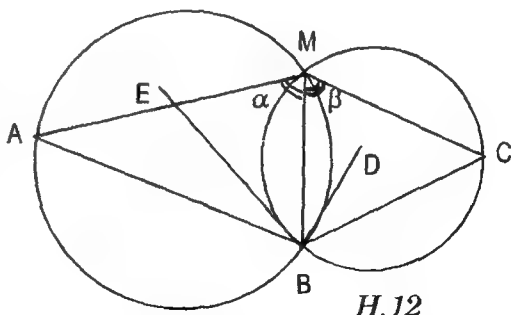
"Vẽ một đường tròn có tâm trên  $m$ , đi qua điểm  $A$  của  $m$  và tiếp xúc với đường thẳng  $n$ ".

**Ví dụ 3.** Tìm phía trong góc  $ABC$  một điểm  $M$  mà từ đó ta nhìn hai đoạn thẳng  $AB$  và  $BC$  dưới hai góc cho trước  $\alpha$

và  $\beta$  (hình 12).

Do  $\widehat{AMB} = \alpha$  nên quỹ tích của M là cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn AB. Lại có  $\widehat{BMC} = \beta$  nên quỹ tích của M là cung chứa góc  $\beta$  dựng trên đoạn BC. Như vậy M phải là giao điểm của hai quỹ tích này tức là giao điểm của hai cung chứa góc  $\alpha$  và  $\beta$ .

Ta kẻ các tiếp tuyến BD và BE với hai cung chứa góc này. Mọi điểm của cung chứa góc thứ nhất nằm trong góc ABD và mọi điểm của cung chứa góc thứ



hai nằm trong góc CBE. Mà hai góc này phải có một phần chung, điều này dẫn tới:

$$\widehat{ABD} + \widehat{CBE} > \widehat{ABC} \text{ hay } 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta > \widehat{ABC}, \text{ hay } \widehat{ABC} + \alpha + \beta < 360^\circ.$$

## Chương II

# BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

(không xét giới hạn)

### I. QUỸ TÍCH LÀ ĐƯỜNG THẲNG, ĐƯỜNG TRÒN

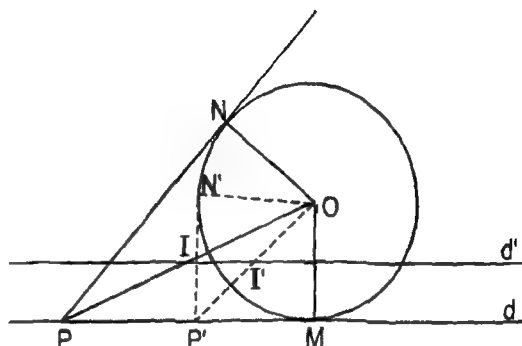
#### 10 BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**Bài 1.** Cho đường tròn  $(O)$  cố định tiếp xúc với đường thẳng  $d$  tại điểm  $M$  cố định trên đường tròn.  $P$  là điểm di chuyển trên đường thẳng  $d$ . Kẻ tiếp tuyến  $PN$  với đường tròn ( $N \neq M$ ). Gọi  $I$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $PMN$ . Khi  $P$  chuyển trên đường thẳng  $d$  thì quỹ tích của  $I$  là gì?

**Hướng dẫn.** Trước hết cần xác định tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta PMN$ . Dễ dàng thấy được tứ giác  $PNOM$  nội tiếp đường tròn đường kính  $PO$ , từ đó suy ra tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\Delta PMN$  là trung điểm đoạn  $OP$ .

**Cách giải**

- **Thuận:** Theo tính chất của tiếp tuyến, ta có:  $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 1v$ . Tứ giác  $PNOM$  có  $\widehat{OMP} + \widehat{ONP} = 1v + 1v = 2v$  nên tứ giác nội tiếp (hình 13) đường tròn đường kính  $PO$ , suy ra  $\Delta PMN$  nội tiếp



H.13

đường tròn tâm  $I$  (với  $I$  là trung điểm đoạn  $OP$ ) do đó có

$IO = IM$  tức là  $I$  nằm trên đường trung trực  $d'$  của  $OM$ . Vậy khi  $P$  di chuyển trên  $d$  thì tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle PMN$  là đường trung trực  $d'$ , trừ giao điểm của  $d'$  với  $OM$ .

- *Đảo*: Lấy  $I'$  bất kì trên  $d'$ . Nối  $O$  với  $I'$  rồi kéo dài cắt  $d$  tại  $P'$ . Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có  $I'$  là trung điểm của  $OP'$ . Từ  $P'$  kẻ tiếp tuyến  $P'N'$ , có tứ giác  $P'MON'$  nội tiếp đường tròn tâm  $I'$ , do đó  $I'$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle P'MN'$ .

- *Kết luận*: Khi  $P$  di chuyển trên đường thẳng  $d$  thì quỹ tích của  $I$  là đường trung trực  $d'$  của đoạn  $OM$  (trừ giao điểm của  $d'$  với  $OM$ ).

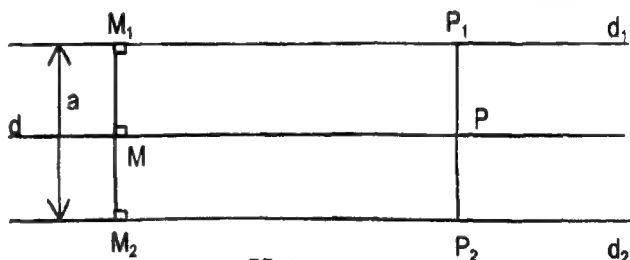
**Bài 2. Tìm quỹ tích các điểm cách đều hai đường thẳng song song cho trước.**

*Hướng dẫn*. Giả sử hai đường thẳng song song cho trước là  $d_1, d_2$ . Trên  $d_1$  lấy điểm  $M_1$ , qua  $M_1$  dựng đường vuông góc với  $d_1$  rồi kéo dài cắt  $d_2$  tại  $M_2$ , đoạn  $M_1M_2 = a$  vuông góc với  $d_1, d_2$  gọi là khoảng cách giữa  $d_1, d_2$ . Nếu  $M$  là trung điểm của  $M_1M_2$ , ta phải tìm quỹ tích của  $M$  cách đều  $d_1, d_2$ . Để làm bài, cần dựa vào khái niệm hình chữ nhật.

*Cách giải*

- *Thuận*: Giả sử hai đường thẳng song song đã cho là  $d_1, d_2$  và khoảng cách giữa hai đường thẳng là  $a$  (hình 14).

Lấy  $M_1$   
bất kì trên  
 $d_1$  dựng  
qua  $M_1$   
đường  
vuông góc  
với  $d_1$  rồi  
kéo dài cắt



H.14

$d_2$  tại  $M_2$ , ta có đoạn  $M_1M_2 = a$  vuông góc với  $d_1, d_2$  gọi là khoảng cách giữa  $d_1, d_2$ .

Giả sử  $M$  thuộc  $M_1M_2$  là điểm cách đều  $d_1, d_2$  tức là  $MM_1 = MM_2 = \frac{a}{2}$  (không đổi).

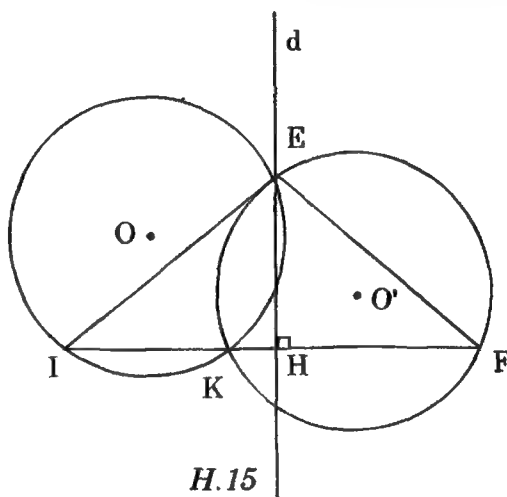
Vậy điểm  $M$  cách đều  $d_1, d_2$  nằm trên đường thẳng  $d$  cách đường thẳng  $d_1, d_2$  một khoảng  $\frac{a}{2}$  (có thể nói  $M$  nằm trên đường thẳng  $d$  cách đều hai đường thẳng  $d_1, d_2$ )

- Đảo: Ngược lại, lấy điểm  $P$  bất kì trên đường thẳng  $d$  rồi vẽ  $PP_1 \perp d_1, PP_2 \perp d_2$ . Các tứ giác  $MM_1P_1P$  và  $MPP_2M_2$  là hình chữ nhật nên  $PP_1 = \frac{a}{2}, PP_2 = \frac{a}{2}$ , do đó  $P$  cách đều hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

**Kết luận:** Quỹ tích các điểm cách đều hai đường thẳng song song cho trước  $d_1, d_2$  là đường thẳng  $d$  song song và cách đều  $d_1, d_2$ .

**Bài 3.** Trên một đường thẳng cho ba điểm  $I, K, F$  cố định theo thứ tự đó. Hai đường tròn  $(O), (O')$  thay đổi bán kính bằng nhau: đường tròn  $(O)$  đi qua hai điểm  $I$  và  $K$ , đường tròn  $(O')$  đi qua hai điểm  $K$  và  $F$ . Hai đường tròn này cắt nhau ở điểm thứ hai  $E$ . Tìm quỹ tích điểm  $E$  khi hai đường tròn thay đổi.

**Hướng dẫn.** Hai đường tròn bằng nhau cắt nhau tại  $K$  và  $E$  thì hai cung  $KE$  trên hai đường tròn này bằng nhau, từ đó suy ra các góc bằng



H.15

nhau để có một tam giác cân. Hãy dựa vào tính chất của tam giác cân để tìm quỹ tích điểm E.

*Cách giải*

- *Thuận*: Theo giả thiết, hai đường tròn (O) và (O') có bán kính bằng nhau (hình 15) và cắt nhau ở hai điểm K, E nên hai cung KE trên đường tròn (O) và trên đường tròn (O') bằng nhau, do đó có:  $\widehat{KIE} = \widehat{KFE}$ , vậy  $\triangle IEF$  cân tại E. Theo tính chất của tam giác cân, suy ra E nằm trên trung trực d của đoạn IF.

- *Đảo*: Cần phải xét hai trường hợp như sau:

a) Điểm K không trùng với trung điểm H của đoạn IF. Với mọi điểm E trên d ( $E \neq H$ ) ta đều vẽ được đường tròn (O) qua I, K, E và đường tròn (O') qua F, K, E. Vì  $\triangle IEF$  cân nên số đo hai cung EK trên hai đường tròn bằng nhau, suy ra hai đường tròn này có bán kính bằng nhau (hai tam giác cân OKE, O'KE có góc ở đỉnh bằng nhau và có cùng cạnh đáy KE nên bằng nhau, suy ra  $OE = O'E$ ). Trong trường hợp này điểm E chạy trên đường thẳng d trừ điểm H.

b) Điểm K trùng với trung điểm H của IF. Xét các đường tròn (O), (O') có đường kính IE và FE thì E trùng với K. Trong trường hợp này điểm E chạy trên toàn bộ đường trung trực d của đoạn IF.

- *Kết luận*: Quỹ tích giao điểm E của hai đường tròn (O), (O') bằng nhau thay đổi đi qua I, K và K, F là đường trung trực d của đoạn IF.

**Bài 4.** Cho tam giác cân ABC ( $AB = AC$ ). Một điểm M di chuyển trên đáy BC. Qua M kẻ đường vuông góc với BC cắt cạnh AB (hoặc tia BA) tại I và cắt tia CA (hoặc cạnh AC) tại K. Tìm quỹ tích trung điểm P của đoạn IK.

*Hướng dẫn.* Từ A hạ các đường vuông góc với BC và KI, sẽ tạo ra một hình chữ nhật. Do đó có:

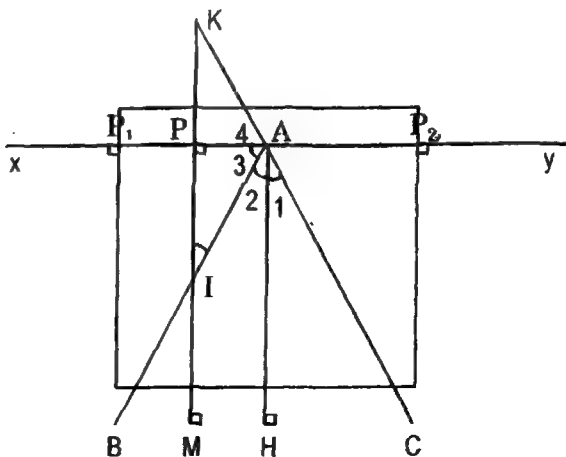


-  $PM = AH$ : không đổi (vì là đường cao của  $\Delta ABC$  cân đã cho), từ đó vận dụng quỹ tích của những điểm  $P$  cách  $BC$  một khoảng không đổi.

- Hoặc  $PM \parallel AH$  suy ra  $\widehat{KAP} = \widehat{IAP}$ , do đó có  $P$  nằm trên phân giác góc ngoài của góc  $A$ .

*Cách giải*

- *Thuận*: Kẻ đường cao  $AH$ , do  $PM \perp BC$  (theo gt) suy ra  $PM \parallel AH$  do đó có  $\widehat{K} = \widehat{A_1}$  (góc đồng vị),  $\widehat{I} = \widehat{A_2}$  (góc so le trong), mà  $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$  (do tính chất của tam giác cân) nên  $\widehat{K} = \widehat{I}$  hay  $\Delta AKI$  cân tại đỉnh  $A$  (hình 16).



H.16

Vì  $P$  là trung điểm của  $KI$  nên trung tuyến  $AP$  cũng sẽ là phân giác của  $\widehat{KAI}$  trong  $\Delta AKI$  suy ra  $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$ . Vậy  $P$  nằm trên phân giác  $xy$  của góc ngoài của  $A$  (lưu ý rằng), vì  $M$  chỉ chạy trên  $BC$  nên  $P$  chạy trên đoạn  $P_1P_2$  của phân giác góc ngoài của  $A$ .

- *Đảo*: Lấy  $P$  bất kì trên  $P_1P_2$ . Hạ  $P'M' \perp BC$ , cắt  $AB$  tại  $I'$  và  $CA$  tại  $K'$ , ta phải chứng minh  $P'$  là trung điểm của đoạn  $K'I'$ .

Thật vậy, do  $AP'$  là phân giác của  $\Delta K'AI'$  cân, nên  $AP'$  cũng là trung tuyến trong  $\Delta K'AI'$  cân. Theo tính chất của tam giác cân suy ra  $P'K' = P'I'$ .

- *Kết luận*: Quỹ tích trung điểm  $P$  của đoạn  $IK$  là đoạn

$P_1P_2$  của tia phân giác góc ngoài của A.

**Chú ý:** Bạn đọc nên tự làm khi sử dụng  $PM = AH$ : không đối để thấy được một cách giải khác của bài toán này.

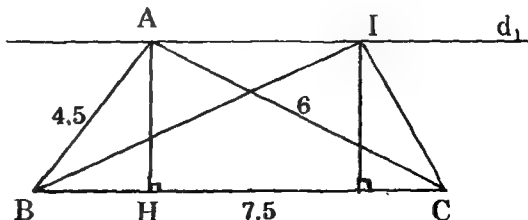
**Bài 5.** Cho tam giác ABC có  $AC = 6\text{cm}$ ,  $AB = 4,5\text{cm}$  và  $BC = 7,5\text{cm}$ .

Tìm quỹ tích điểm I sao cho diện tích tam giác ABC luôn bằng diện tích tam giác IBC.

**Hướng dẫn.** Từ các số liệu đã cho về độ dài các cạnh có thể suy ra  $\Delta ABC$  vuông tại A, do đó tính được độ dài đường cao AH. Dựa vào điều đã cho:  $S_{ABC} = S_{IBC}$  sẽ tìm được độ dài khoảng cách từ I đến BC rồi suy ra quỹ tích điểm I.

**Cách giải**

- **Thuận:** Ta có  $\Delta IBC$  có cạnh là BC cho trước,  $S_{IBC} = S_{ABC}$  không đổi, nên đường cao của  $\Delta IBC$  ứng với cạnh BC có độ dài bằng độ dài đường cao AH của  $\Delta ABC$  (hình 17).



H.17

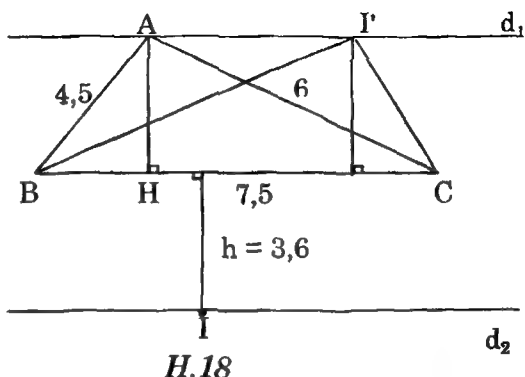
Ta thấy  $4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$  và  $7,5^2 = 56,25$  theo định lý đảo của định lý Pitago ta có  $\Delta ABC$  vuông tại A.

Ta có  $BC \cdot AH = AC \cdot AB$  suy ra  $AH = \frac{AC \cdot AB}{BC} = \frac{6 \cdot 4,5}{7,5} = 3,6(\text{cm})$ .

Vậy điểm I luôn cách đường thẳng BC cho trước một khoảng không đổi là 3,6 (cm) nên I chạy trên  $d_1$  với  $d_1 \parallel BC$  và cách BC một khoảng  $h = 3,6$  (cm).

- **Đảo:** Lấy  $I'$  bất kì thuộc đường thẳng  $d_1$  sao cho  $d_1 \parallel BC$  và  $d_1$  cách BC một khoảng  $h = 3,6$  (cm). Khi đó  $S_{I'BC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} BC \cdot 3,6$  mà  $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} BC \cdot 3,6$  suy ra  $S_{I'BC} = S_{ABC}$ .

- *Kết luận:* Quỹ tích điểm I sao cho diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác IBC là hai đường thẳng  $d_1, d_2$  đối xứng nhau qua BC (hình 18) cùng song song với BC và cách BC một khoảng không đổi  $h = 3,6$  (cm)

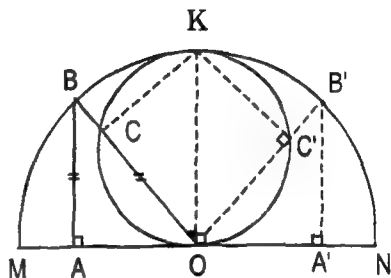


**Bài 6.** Cho nửa đường tròn đường kính MON. Từ một điểm A bất kì trên MN vẽ đường vuông góc với MN. Đường vuông góc này gặp nửa đường tròn tại B. Trên OB lấy  $OC = AB$ . Tìm quỹ tích điểm C khi A chuyển động trên MN.

*Hướng dẫn.* Qua O hãy dựng đường vuông góc với MN cắt nửa đường tròn tại K (hình 19) ta được  $BA \parallel KO$  rồi suy ra  $\hat{C} = \hat{A} = 1v$ . Từ đó tìm được quỹ tích của C.

*Cách giải*

- *Thuận:* Qua O dựng đường vuông góc với MN, cắt nửa đường tròn tại K, ta có OK cố định và  $BA \parallel KO$ . Xét hai tam giác BAO và OCK có  $BA = CO$  (theo gt),  $\hat{B} = \hat{O}$  (góc so le trong).  $BO = KO$  (bán kính nửa đường tròn), vậy  $\triangle BAO = \triangle OCK$  (c.g.c), suy ra  $\hat{C} = \hat{A} = 1v$ .



H.19

Ta thấy C nhìn OK cố định dưới góc KCO bằng  $1v$  nên C nằm trên đường

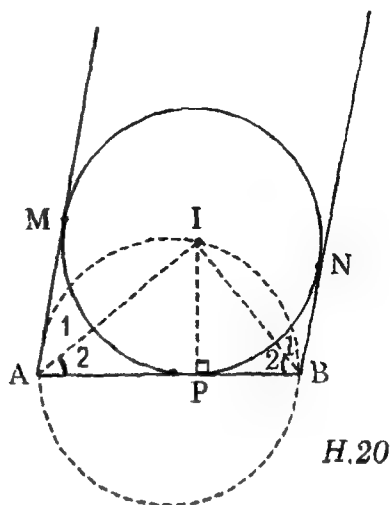
tròn đường kính OK.

- *Đảo*: Lấy  $C'$  bất kì trên đường tròn đường kính OK. Nối O với  $C'$  cho cắt (O) tại  $B'$ , kẻ  $B'A' \perp MN$ , ta phải chứng minh  $B'A' = OC'$ .

Thật vậy, hai tam giác vuông  $OC'K$  và  $B'A'O$  có  $OK = OB'$  và  $\widehat{C'OK} = \widehat{A'B'O}$  (góc so le trong), nên hai tam giác này bằng nhau (cạnh huyền và góc nhọn bằng nhau), suy ra  $B'A' = OC'$ .

- *Kết luận*: Quỹ tích điểm C khi A chuyển động trên MN là đường tròn đường kính OK (K là trung điểm của  $\widehat{MN}$ ).

**Bài 7.** Cho đoạn thẳng AB, đường tròn (I) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với AB sao cho các tiếp tuyến kẻ từ A và B đến đường tròn (I) song song với nhau. Gọi M và N là các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ A và B và gọi P là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB. Tìm quỹ tích tâm I.



**Hướng dẫn.** Vận dụng tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm ở ngoài đường tròn đến đường tròn đó để suy ra  $\widehat{AIB} = 90^\circ$ . Từ đó, với giả thiết AB đã cho là cố định suy ra quỹ tích của I.

*Cách giải*

- *Thuận*: Theo giả thiết thì  $AM \parallel BN$  (hình 20), suy ra  $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$  (hai góc trong cùng phía bù nhau).

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm đến đường tròn, ta có  $\widehat{A}_2 = \frac{\widehat{A}}{2}$  và  $\widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2}$ . Do đó

$$\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Trong  $\Delta AIB$  có  $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 = 90^\circ$  nên  $\widehat{AIB} = 90^\circ$ .

Điểm I nhìn đoạn AB đã cho dưới một góc vuông nên I nằm trên đường tròn đường kính AB (trừ hai điểm A và B vì khi đó đường tròn (I) suy biến thành một điểm).

- *Đảo*: Lấy I' bất kì thuộc đường tròn đường kính AB, hạ I'P' vuông góc với AB, rồi vẽ đường tròn tâm I' bán kính I'P'. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến AM' và BN'. Ta phải chứng minh hai tiếp tuyến này song song.

Thật vậy, do  $\widehat{AIB} = 90^\circ$  nên  $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 = 90^\circ$ , suy ra  $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$  (hai góc trong cùng phía bằng  $180^\circ$ ) nên  $AM' \parallel BN'$ .

- *Kết luận*: Quỹ tích tâm I là đường tròn đường kính AB trừ hai điểm A và B.

*Bài 8. Cho đường tròn (O, R), một điểm M cố định trên đường tròn, một điểm E di động trên đường tròn đó. Dựng hình thoi OMNE. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác MNE.*

*Hướng dẫn.* Dựa vào tính chất của trọng tâm một tam giác và tính chất về đường chéo của hình thoi có  $NG = \frac{1}{3}NO$  (1).

Mặt khác do A, O cố định nên xác định được điểm K sao cho

$MK = \frac{1}{3}MO$  (2), từ đó có K cố định. Từ (1) và (2) theo định lí

Talet đảo có  $KG \parallel MN$  và  $\frac{KG}{MN} = \frac{2}{3}$ , mà  $MN = MO$  nên  $KG =$

$\frac{2}{3}MO = \frac{2}{3}R$ . Do đó suy ra

quỹ tích của trọng tâm G.

*Cách giải*

- Thuận: Ta có G là trọng tâm của  $\triangle MNE$  (hình 21) nên  $NG = \frac{2}{3}NQ$

với Q là trung điểm của ME. Do OMNE là hình thoi nên  $NQ = QO$  hay  $NQ = \frac{1}{2}$

$NO$ , suy ra  $NG = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}NO = \frac{1}{3}NO$  (1).

Gọi K là một điểm trên đoạn OM sao cho  $MK = \frac{1}{3}OM$  (2).

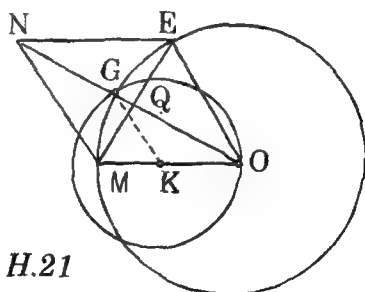
Vì M và O cố định nên K cố định, từ (1), (2) có:

$\frac{NG}{NO} = \frac{MK}{MO} = \frac{1}{3}$ , nên theo định lí Talet đảo ta có  $KG \parallel MN$  và

$\frac{KG}{MN} = \frac{2}{3}$ .

Vì tứ giác OMNE là hình thoi nên  $MN = MO = R$ , suy ra  $KG = \frac{2}{3}MN = \frac{2}{3}R$ . Vậy trọng tâm G nằm trên đường tròn tâm K bán kính bằng  $\frac{2}{3}R$ .

- Đảo: Lấy một điểm G' tùy ý trên đường tròn  $(K, \frac{2}{3}R)$ . Kéo



H.21

dài  $OG'$  một đoạn  $G'N' = \frac{1}{3}OG'$ . Dựng  $MQ \perp OG'$  và  $MQ'$  cắt đường tròn  $(K, \frac{2}{3}R)$  tại  $E'$ . Ta phải chứng minh  $G'$  là trọng tâm của  $\triangle MN'E'$ .

Vì  $ME' \perp OQ'$  nên  $Q'$  là trung điểm đoạn  $ME'$ , từ đó  $N'Q'$  là trung tuyến xuất phát từ đỉnh  $N'$  của  $\triangle MN'E'$ . Vì  $G'N' = \frac{1}{2}OG'$  mà  $KM = \frac{1}{2}KO$  nên suy ra  $KG' \parallel MN'$  và  $KG' = \frac{2}{3}MN'$ . Vì  $G'$  thuộc đường tròn  $(K, \frac{2}{3}R)$  nên  $KG' = \frac{2}{3}R$ . Suy ra  $MN' = R$ , từ đó  $MN'E'O$  là hình thoi và  $G'$  là trọng tâm của  $\triangle MN'E'$ .

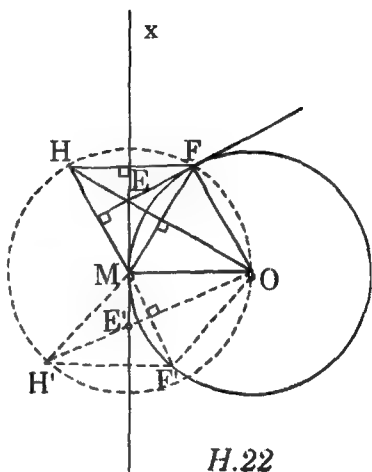
- *Kết luận.* - Quỹ tích trọng tâm  $G$  là đường tròn  $(K, \frac{2}{3}R)$ .

**Bài 9.** Cho đường tròn  $(O, R)$ , một điểm  $M$  cố định trên đường tròn. Qua  $M$  dựng tiếp tuyến  $Mx$ . Trên  $Mx$  lấy một điểm  $E$  và từ  $E$  kẻ tiếp tuyến thứ hai  $EF$  với đường tròn. Tìm quỹ tích trực tâm  $H$  của tam giác  $MEF$  khi  $E$  chạy trên tiếp tuyến  $Mx$ .

*Hướng dẫn.* Trước hết hãy vẽ hình để xác định trực tâm  $H$  của  $\triangle MEF$  rồi chứng minh rằng  $MHFO$  là hình thoi, từ đó suy ra quỹ tích của trực tâm  $H$ .

*Cách giải*

- *Thuận:* (hình 22).



Nối  $O$  với  $E$  ta có  $EO \perp MF$  (hình 22). Từ  $M$  hạ đường vuông góc với  $EF$ , đường này cắt  $OE$  tại  $H$ , ta có trục tâm  $H$  của  $\Delta MEF$ .

Ta có  $OF \perp EF$  (vì  $EF$  là tiếp tuyến),  $MH \perp FE$  (vì  $H$  là trục tâm của  $\Delta MEF$ ), do đó  $OF \parallel MH$ . Ta lại có  $OM \perp ME$  (vì  $Mx$  là tiếp tuyến),  $FH \perp ME$  (vì  $H$  là trục tâm của  $\Delta MEF$ ), do đó  $OM \parallel FH$ .

Tứ giác  $OMHF$  có  $OF \parallel MH$ ,  $OM \parallel FH$  và  $OF = OM$  nên là hình thoi, suy ra  $MH = MO = R$ : không đổi.

$H$  cách  $M$  cố định một đoạn bằng  $R$ , nên  $H$  nằm trên đường tròn tâm  $M$  bán kính  $R$ .

- *Đảo*: Lấy  $H'$  bất kì thuộc đường tròn  $(M, R)$ . Nối  $H'$  với  $O$  cắt  $Mx$  tại  $E'$ . Kẻ tiếp tuyến  $E'F'$  với  $(O, R)$ . Do  $E'M = E'F'$  nên  $E'H'$  là phân giác của  $\widehat{ME'F'}$ , từ đó suy ra  $E'H'$  là trung trực của đoạn  $MF'$  hay  $H'E' \perp MF'$ .

Điểm  $H'$  nằm trên trung trực của  $MF'$  nên  $H'F' = H'M = R = OF' = OM$ , do đó  $OMH'F'$  là hình thoi, nên  $OM \parallel H'F'$ , nhưng  $OM \perp Mx$  suy ra  $H'F' \perp Mx$ .

Như vậy  $H'F' \perp ME'$  và  $H'E' \perp MF'$  nên  $H'$  là trục tâm của  $\Delta ME'F'$ .

- *Kết luận*: Quỹ tích trục tâm  $H$  là đường tròn  $(M, R)$ .

**Bài 10.** Cho đường tròn  $(O, R)$  và một đoạn thẳng  $AB$  ở bên ngoài đường tròn. Điểm  $C$  di chuyển trên đường tròn. Tìm quỹ tích trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

*Hướng dẫn.* Trước hết hãy vẽ hình để xác định trung tuyến  $CM$  từ đó xác định trọng tâm  $G$  của  $\Delta ABC$  và chú ý rằng  $\frac{MG}{MC} = \frac{1}{3}$  rồi vận dụng định lí Talet trong tam giác sẽ suy ra được quỹ tích của  $G$ .

*Cách giải*



- *Thuận*: Gọi M là trung điểm của đoạn AB (hình 23), qua trọng tâm G kẻ đường thẳng song song với CO cắt MO ở O'; ta có  $GO' \parallel CO$  suy ra  $\frac{MO'}{MO} = \frac{GO'}{CO} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3}$ , suy ra O' cố định và  $GO' = \frac{R}{3}$ . Như vậy là điểm G cách O' cố định một khoảng bằng  $\frac{R}{3}$  không đổi, suy ra G nằm trên đường tròn (O',  $\frac{R}{3}$ ).

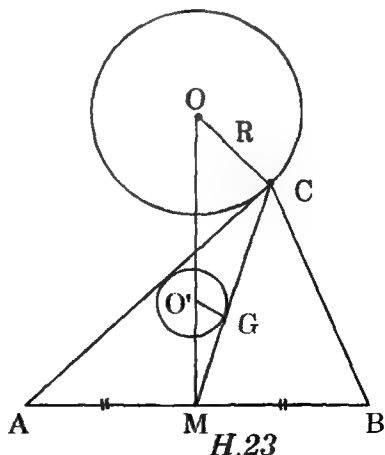
- *Đảo*: Lấy G' bất kì thuộc đường tròn (O',  $\frac{R}{3}$ ) với O' là điểm chia trong đoạn MO theo tỉ số 1:2.

Trên tia MG lấy điểm C sao cho  $MC = 3MG$ . Ta có

$$\frac{MO'}{MO} = \frac{MG}{MC} = \frac{1}{3} \text{ suy ra } O'G \parallel$$

OC, do đó  $OC = 3O'G = 3 \cdot \frac{R}{3} = R$  như vậy là C thuộc đường tròn (O, R).

- *Kết luận*: Quỹ tích trọng tâm G của  $\triangle ABC$  là đường tròn (O',  $\frac{R}{3}$ ) với O' là điểm chia trong đoạn MO theo tỉ số 1:2 (trong đó M là trung điểm của AB).



## 5 BÀI TOÁN TỰ GIẢI

### ĐỀ BÀI

**Bài 1.** Cho hình bình hành  $MNPQ$ ,  $E$  là trung điểm của cạnh  $PQ$ . Kéo dài  $ME$  cắt  $NP$  tại  $F$ . Tìm quỹ tích của  $F$  khi cạnh  $MN$  cố định còn cạnh  $PQ$  trượt trên đường thẳng  $a$  song song với đường thẳng  $MN$ .

**Bài 2.** Cho đường thẳng  $d$  và một đoạn thẳng  $PQ = m$  không đổi trượt trên một đường thẳng khác  $d' \nparallel d$ . Biết rằng đầu mút  $P$  chạy trên một đường tròn  $(O, r)$ , tìm quỹ tích đầu mút  $Q$  của đoạn thẳng  $PQ$ .

**Bài 3.** Cho tam giác vuông  $AOB$  cân tại  $O$ . Gọi  $M$  là một điểm bất kì trên cạnh huyền  $AB$  và  $P, Q$  theo thứ tự là hình chiếu của  $M$  trên  $OA, OB$ . Tìm quỹ tích trung điểm  $N$  của đoạn thẳng  $PQ$ .

**Bài 4.** Cho đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AB$ , qua  $B$  dựng tiếp tuyến  $xBy$  với đường tròn,  $CD$  là một đường kính bất kì. Gọi giao điểm của  $AC$  và  $AD$  với  $xy$  theo thứ tự là  $M, N$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $MCDN$ . Tìm quỹ tích của điểm  $I$  khi đường kính  $CO$  quay quanh  $O$ .

**Bài 5.** Cho đường tròn  $(O, R)$  cố định và điểm  $A$  cố định thuộc đường tròn,  $B$  là điểm di động trên đường tròn. Tìm quỹ tích các điểm  $M$  sao cho  $B$  là trung điểm của  $AM$ .

### HƯỚNG DẪN CÁCH GIẢI

#### **Bài 1. Hướng dẫn**

- Lưu ý rằng từ giả thiết  $EP$  là đường trung bình của tam giác  $FMN$ . Suy ra  $EM = EF$ . Hạ các đường vuông góc

$MM_1$  và  $FF_1$  với đường thẳng  $a$  và chứng minh chúng bằng nhau. Từ đó suy ra quỹ tích của  $F$ .

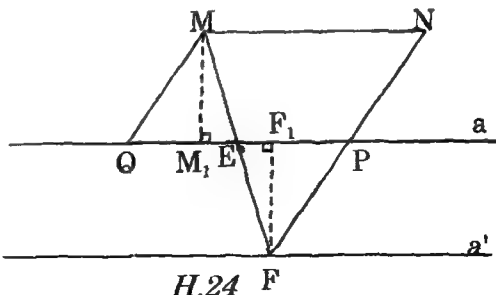
- *Thuận*: Do  $EQ = EP = \frac{1}{2}MN$  (gt) nên  $EP$  là đường

trung bình của tam giác  $FMN$ . Suy ra  $EM = EF$  (hình 24).

Từ  $M$  kẻ  $MM_1 \perp a$ , từ  $F$  kẻ  $FF_1 \perp a$ . Ta có:

$\triangle MM_1E = \triangle FF_1E$  (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra  $MM_1 = FF_1$ .

Vậy  $F$  chạy trên đường thẳng  $a'$  đối xứng với đường thẳng  $MN$  qua đường thẳng  $a$  đã cho.



- *Đảo*: Lấy  $F'$  bất kì trên  $a'$ . Nối  $F'M$  cắt  $a$  tại  $E'$  còn  $F'N$  cắt  $a$  tại  $P'$ . Lấy điểm  $Q'$  đối

xứng với  $P'$  qua  $E'$ , ta phải chứng minh rằng  $MNP'Q'$  là hình bình hành.

Thật vậy tứ giác  $MP'F'Q'$  có  $E$  là trung điểm của hai đường chéo  $MF'$  và  $Q'P'$  nên là hình bình hành, suy ra  $QM \parallel P'F'$  tức là  $QM \parallel PN$ . Tứ giác  $MNP'Q'$  có hai cặp cạnh đối song song  $MN \parallel Q'P'$  và  $QM \parallel PN$  là hình bình hành.

- *Kết luận*: Quỹ tích của  $F$  là đường thẳng  $a'$  đối xứng với đường thẳng  $MN$  qua đường thẳng  $a$ .

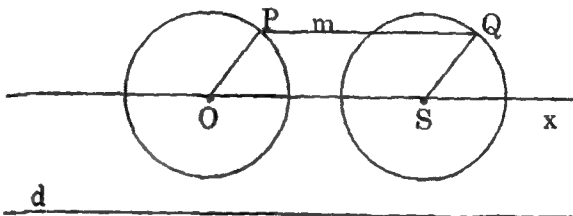
**Bài 2. Hướng dẫn** - Từ  $O$  dựng tia  $Ox \parallel d$  trên  $Ox$  lấy đoạn  $OS = m$ . Sau đó chứng minh tứ giác  $OPQS$  là hình bình hành để được  $SQ = OP = r$ . Từ đó suy ra quỹ tích của  $Q$ .

- *Thuận*: Dựng tia  $Ox$  song song với đường thẳng  $d$  cho trước. Trên  $Ox$  lấy đoạn  $OS = m$ , ta được điểm  $S$  cố định

(hình 25). Do  $OS \parallel PQ$  và  $OS = PQ = m$  nên tứ giác  $OPQS$  là hình bình hành. Suy ra  $OP = SQ = r$  không đổi.

Vậy  $Q$  chạy trên đường tròn tâm  $S$  bán kính bằng  $r$ .

- Đảo: Lấy  $Q'$  bất kì trên đường tròn  $(S, r)$ . Nối  $SQ'$  và từ  $O$  kẻ



H.25

$OP' \parallel SQ'$  ta phải chứng minh  $P'Q' = m$ . Thật vậy, tứ giác  $OP'Q'S$  có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau ( $OP' \parallel SQ'$  và  $OP' = SQ' = r$ ) nên là hình bình hành mà  $OS = m$ , do đó  $P'Q' = m$ .

- Kết luận: Quỹ tích của  $Q$  là đường tròn  $(S, r)$ ,  $S$  nằm trên tia  $Ox \parallel PQ$  và  $OS = m$ .

**Bài 3. Hướng dẫn.** Chú ý rằng trung điểm  $N$  của  $QP$  cũng là trung điểm của  $OM$ . Từ  $N$  kẻ  $NF \perp AB$ , dễ dàng chứng minh được  $NF = \frac{OH}{2}$  với  $OH$  là đường cao của  $\triangle AOB$ , từ đó suy ra quỹ tích trung điểm  $N$  của  $PQ$ .

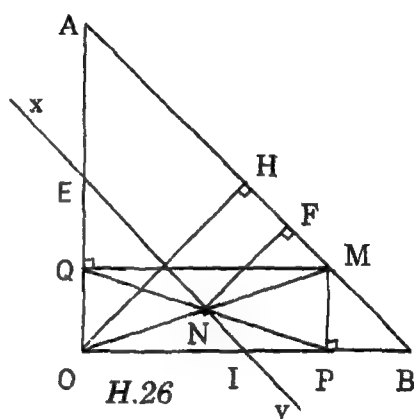
- Thuận: Dễ dàng nhận thấy rằng  $OPMQ$  là hình chữ nhật (hình 26) nên trung điểm  $N$  của  $PQ$  cũng chính là trung điểm của  $OM$ .

Hạ  $NF \perp AB$  và  $OH \perp AB$  ta có  $NF = \frac{OH}{2}$ . Biết  $O$  cố định nên  $OH$  không đổi. Như vậy  $N$  luôn cách  $AB$  một đoạn không đổi nên  $N$  nằm trên đường thẳng  $xy$  song song với  $AB$  cách  $AB$  một đoạn bằng  $\frac{OH}{2}$ . Lưu ý rằng, do  $M$  chỉ chạy trên  $AB$  nên  $N$  chỉ chạy trên  $El$ .

- *Đảo*: Lấy  $N'$  bất kì trên  $EI$ . Nối  $ON'$  cắt  $AB$  tại  $M'$  rồi hạ  $M'P' \perp OB$ ,  $M'Q' \perp OA$ , ta phải chứng minh  $N'$  là trung điểm của  $P'Q'$ .

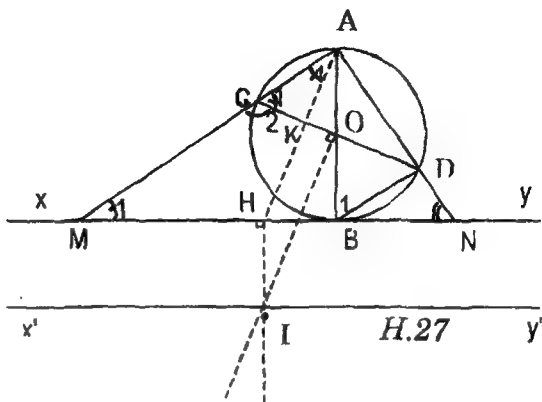
Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận*: Quỹ tích trung điểm  $N$  của đoạn  $PQ$  là đoạn  $EI$  song song với  $AB$  cách  $AB$  một đoạn bằng  $\frac{OH}{2}$  ( $OH$  là đường cao của



tam giác vuông cân AOB).

**Bài 4. Hướng dẫn.** Trước hết cần chứng minh rằng tứ giác  $MCDN$  nội tiếp đường tròn. Tâm  $I$  của đường tròn này là giao điểm của trung trực  $IH$  của  $MN$  và đường trung trực  $IO$  của  $CD$ . Sau đó chứng minh  $AHIO$  là hình bình hành, suy ra  $IH = OA = R$  ( $R$  là bán kính đường tròn  $O$  đã cho), từ đó tìm được quỹ tích của điểm  $I$ .



- *Thuận*: Ta có  $\widehat{C_1} = \widehat{N}$ , mà  $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 2v$  nên  $\widehat{N} + \widehat{C_2} = 2v$ , do đó tứ giác  $MCDN$  nội tiếp được đường tròn (hình 27).

Tâm  $I$  của đường tròn này là giao điểm của trung trực

IH của đoạn MN và trung trực IO của đoạn CD.

Ta có  $IH \perp xy$  và  $AO \perp xy$  suy ra  $AO \parallel HI$ .

Vì H là trung điểm MN nên  $HM = HA$  suy ra  $\triangle AHM$  cân nên  $\widehat{A_1} = \widehat{M_1}$  mà  $\widehat{C_1} = \widehat{N}$  và  $\widehat{M} + \widehat{N} = 1v$  do đó  $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 1v$ . Trong tam giác CAK có  $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 1v$  nên  $\widehat{K} = 1v$  hay  $HA \perp CD$ , mặt khác có  $IO \perp CD$  suy ra  $AH \parallel IO$ .

Tứ giác AHIO có  $AO \parallel HI$  và  $AH \parallel IO$  nên là hình bình hành, do đó  $IH = OA = R$ : không đổi. Vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN nằm trên  $x'y' \parallel xy$  cách xy một đoạn bằng  $IH = R$ .

- *Đảo*: Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận*: Quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCDN là đường thẳng  $x'y'$  song song với xy và cách xy một đoạn bằng R.

**Bài 5. Hướng dẫn.** Qua A dựng đường kính AOI để tạo ra tam giác AIM, trong đó OB là đường trung bình của  $\triangle AIM$ , từ đó suy ra quỹ tích của M.

- *Thuận*: Qua A vẽ đường kính AOI. Vì A cố định nên I cũng cố định (hình 28).

Nối I với M, trong tam giác AIM ta có  $AB = BM$  (theo gt) và  $OA = OI$  nên OB là đường trung bình của  $\triangle AIM$ , suy ra  $IM = 2OB = 2R$ : không đổi.

Điểm M có tính chất cách I cố định một đoạn không đổi bằng  $2R$  nên khi B chạy trên đường tròn O thì M chạy trên đường tròn tâm I bán kính bằng  $2R$  (trừ B trùng với A).

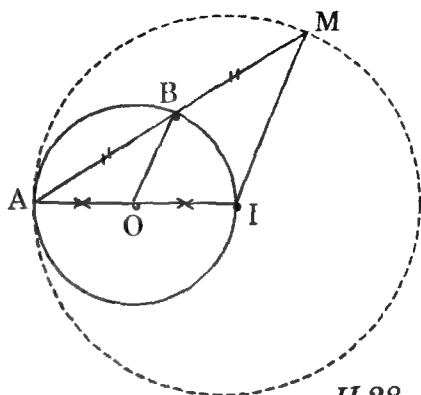
- *Đảo*: Lấy M' bất kì thuộc đường tròn (I,  $2R$ ), nối A với M' rồi lấy B' là trung điểm của AM', ta phải chứng minh B' nằm trên đường tròn (O, R).

Thật vậy, trong tam giác AIM' ta có  $B'A = B'M'$  và  $OA = OI$  nên OB' là đường trung bình của  $\triangle AIM'$  vậy  $OB' =$

$$\frac{IM'}{2} = \frac{2R}{2} = R, \text{ do đó } B'$$

phải nằm trên đường tròn  $(O, R)$ .

- *Kết luận:* Quỹ tích của điểm M khi B di động trên đường tròn  $(O, R)$  là đường tròn  $(I, 2R)$  trong đó I là điểm đối tâm của A trong  $(O)$ .



H.28

## II. QUAN HỆ GIỮA TOÁN QUỸ TÍCH VÀ

### TOÁN DỰNG HÌNH

Giữa toán dựng hình và toán quỹ tích có tác dụng hữu cơ với nhau. *Phép dựng hình hỗ trợ đắc lực cho việc giải toán quỹ tích*, nhất là đối với những bài toán quỹ tích tương đối khó, ngược lại để làm trọn vẹn bài toán dựng hình phải dùng một số quỹ tích cơ bản. Ở phần trên đã trình bày về "phương pháp quỹ tích tương giao" giúp tìm một điểm thỏa mãn một số điều kiện cho trước, đó cũng chính là bài toán dựng hình. Chẳng hạn bài toán dựng một tam giác ABC biết độ dài ba cạnh  $a, b, c$ .

Sau khi dựng đoạn thẳng  $BC = a$ , ta phải xác định đỉnh A của tam giác thỏa mãn hai điều kiện: A cách B một khoảng bằng  $c$ , và cách C một khoảng bằng  $b$ . Thực chất đây là tìm giao điểm của hai quỹ tích, tức là tìm giao điểm của hai cung tròn tâm B bán kính  $c$  và tâm C bán kính  $b$ .

Rõ ràng giữa dựng hình và quỹ tích có mối tương hỗ mật thiết.

## 10 BÀI TOÁN MINH HỌA

**Bài 1.** Cho đường tròn  $(O)$  và một đường thẳng  $d$  ở ngoài đường tròn. Tìm trên  $d$  một điểm  $E$  sao cho tiếp tuyến  $EG$  với  $(O)$  có độ dài  $a$  cho trước.

**Bài 2.** Từ một điểm  $A$  cho trước ở ngoài đường tròn  $(O)$  dựng một cát tuyến  $AMN$  sao cho tổng  $AM + AN = m$ , là một độ dài bằng  $m$  cho trước.

**Bài 3.** Cho ba điểm  $A, B, C$ . Dựng một tứ giác  $MNPQ$  sao cho ba điểm này là trung điểm của ba cạnh bằng nhau của tứ giác.

**Bài 4.** Dựng hình vuông  $MNPQ$  biết đỉnh  $M$  và trung điểm  $S$  của cạnh  $PN$ .

**Bài 5.** Dựng đường tròn qua hai điểm  $C$  và  $D$  cho trước và chia một đường tròn  $(O, R)$  cho trước thành hai nửa bằng nhau.

**Bài 6.** Cho hai điểm  $E$  và  $F$  nằm cùng phía của một đường thẳng  $d$  cho trước. Tìm một điểm  $I$  nằm ngoài  $d$  nhìn  $EF$  dưới một góc  $\beta$  cho trước và hai cạnh của góc  $EIF$  chắn trên  $d$  một đoạn có độ dài  $a$  cho trước.

**Bài 7.** Dựng một tam giác  $MNP$  vuông tại  $M$  nội tiếp trong đường tròn  $(I)$  sao cho hai cạnh của tam giác đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  cố định nằm trong  $(I)$ .

**Bài 8.** Cho điểm  $E$  nằm trong góc nhọn  $mAn$ . Dựng qua  $E$  một cát tuyến  $PEQ$  ( $P \in Am, Q \in An$ ) sao cho tổng  $AP + AQ$  bằng một độ dài  $p$  cho trước.

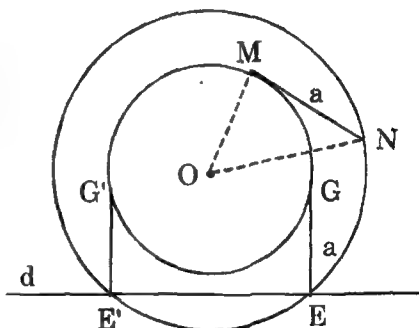
**Bài 9.** Tìm trên cạnh đáy  $BC$  của tam giác  $ABC$  một điểm  $M$  sao cho khi kẻ từ  $M$  những đường thẳng song song với cạnh kia ta được một hình bình hành  $APMQ$  có chu vi  $2p$  cho trước.

**Bài 10.** Tìm một điểm  $M$  sao cho chân các đường vuông góc hạ từ  $M$  xuống các cạnh của một tam giác  $ABC$  luôn thẳng hàng.



## SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

**Bài 1.** Điểm E phải tìm là giao điểm của đường thẳng d với quỹ tích của đầu mút các tiếp tuyến có độ dài a. Để dựng nó ta đặt trên một tiếp tuyến bất kì một đoạn  $MN = a$  rồi vẽ đường tròn tâm O bán kính ON (hình 29).



H.29

Nếu d cắt đường tròn (O, ON) thì có 2 điểm E và E' ở ngoài (O) tức có hai nghiệm hình EG và E'G'.

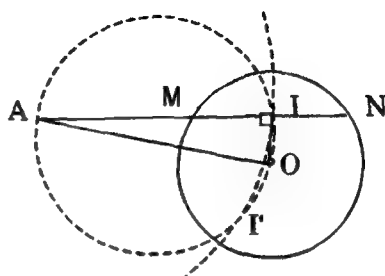
**Bài 2.** Gọi I là trung điểm của MN ta có  $AM + AN = (AI - MI) + (AI + IN) = 2AI = a$ , do đó  $AI = \frac{a}{2}$ . Khoảng giữa A và I

bằng  $\frac{a}{2}$  nên quỹ tích của I

là đường tròn tâm A bán kính  $\frac{a}{2}$  (hình 30). Mặt khác

do  $OI \perp MN$  nên  $\widehat{AIO} = 90^\circ$ , vậy quỹ tích của I là đường tròn đường kính AO.

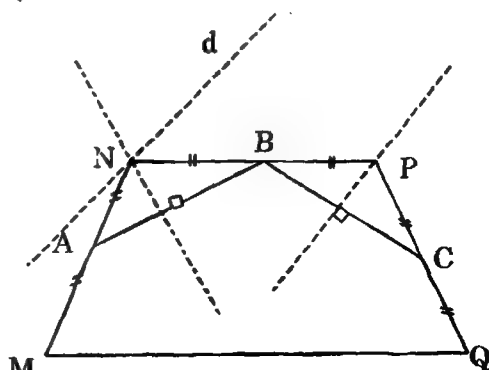
Dựng hai quỹ tích này ta sẽ được giao điểm I. Từ I sẽ dựng được cát tuyến AMN.



H.30

Nếu tiếp tuyến với (O) kẻ từ A có độ dài  $m$  thì  $AO > \frac{a}{2} > m$ , bài toán có 2 nghiệm hình vì hai quỹ tích có 2 giao điểm I và I' đều nằm trong (O). Nếu  $AO = \frac{a}{2}$  thì hai quỹ tích tiếp xúc nhau nên bài toán chỉ có một nghiệm hình. Nếu  $\frac{a}{2} \leq m$  thì hai quỹ tích có 2 giao điểm nằm trên hoặc ngoài (O) do đó bài toán vô nghiệm.

**Bài 3.** Giả sử bài toán đã dựng được, tức là tứ giác MNPQ có A, B, C theo thứ tự là trung điểm của ba cạnh bằng nhau  $MN = NP = PQ$  (hình 31). Ta thấy ngay hai đỉnh N và P của tứ giác phải nằm trên các trung trực của AB và BC (quỹ tích cơ



H.31

bản). Do đó bài toán quy về: dựng đoạn thẳng NP có hai đầu ở trên hai đường thẳng cho trước và nhận điểm B cho trước làm trung điểm. Vậy chỉ cần dựng đường thẳng  $d$  đối xứng với trung trực của BC qua B.

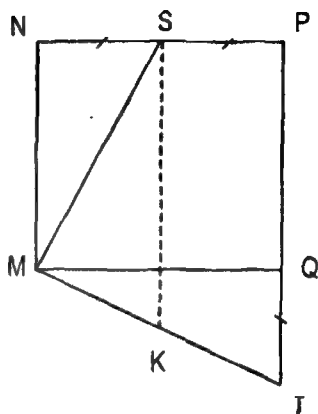
Nếu A, B, C không thẳng hàng thì bài toán có 1 nghiệm hình.

Nếu A, B, C thẳng hàng thì bài toán hoặc là vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm (khi  $AB = BC$ ).

**Bài 4.** Ta kéo dài PQ về phía Q một đoạn  $QI = NS =$

$\frac{1}{2}MN$  (hình 32). Ba tam giác vuông  $MNS$ ,  $QPS$  và  $MQI$  bằng nhau (2 cạnh góc vuông bằng nhau). Suy ra tam giác  $SMI$  vuông cân. Như vậy ngoài hai điểm  $M$  và  $S$  cho trước ta xác định thêm điểm thứ ba  $I$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $MI$ , ta có  $SK$  là đường trung bình của hình thang vuông  $MNPI$ . Từ đó dựng được đỉnh thứ hai  $Q$  đối xứng với  $M$  qua  $SK$ . Vậy chỉ cần xác định thêm hai đỉnh  $P$ ,  $N$  để được hình vuông  $MNPQ$ .

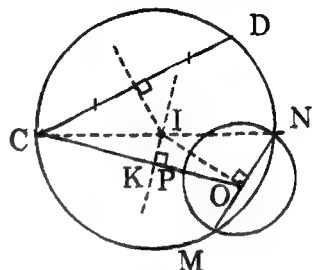


H.32

**Bài 5.** Tâm  $I$  của đường tròn cần dựng phải nằm trên trung trực của đoạn  $CD$  (hình 33). Hai đường tròn  $(I)$  và  $(O)$  cắt nhau tại hai điểm  $M$  và  $N$  với  $MN$  là đường kính của  $(O)$ . Ta có  $IO \perp MN$  nên:  $IC^2 - IO^2 = IN^2 - IO^2 = ON^2 = R^2$ .

Theo quỹ tích cơ bản thì  $I$  phải nằm trên đường thẳng vuông góc với  $OC$  tại  $P$  cách trung điểm  $K$  của  $OC$  một khoảng bằng  $\frac{R^2}{2OC}$ .

Vì thế ta nối  $OC$  rồi dựng điểm  $P$  sao cho  $PK = \frac{R^2}{2OC}$ . Từ  $P$  dựng

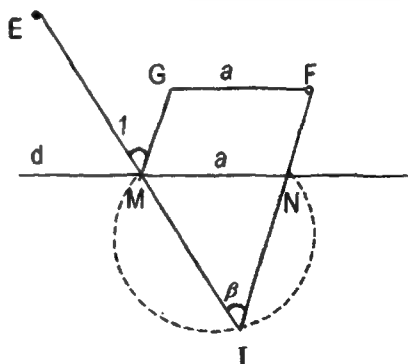


H.33

đường vuông góc với  $OC$  cắt trung trực của  $MN$  tại  $I$  là tâm đường tròn cần dựng.

Bài toán có 1 nghiệm hình nếu ba điểm  $O$ ,  $C$ ,  $D$  không thẳng hàng.

**Bài 6.** Giả sử  $I$  là điểm đã dựng được. Nếu từ  $F$  ta kẻ đường song song với  $d$  và đặt đoạn  $FG = a$  thì tứ giác  $FGMN$  là hình bình hành (hình 34). nên  $MG \parallel NF$ , do đó  $M_1 = \beta$  (đồng vị). Từ đó xác định được điểm  $M$  và suy ra điểm  $I$ . Ta có cách dựng sau:



H.34

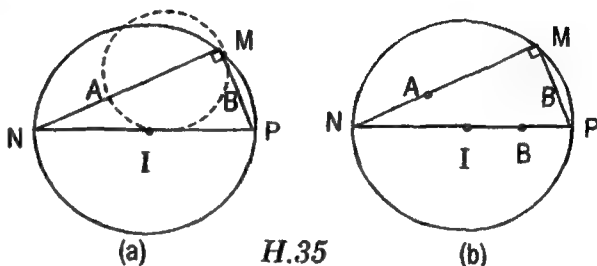
Qua  $F$  dựng đường thẳng song song với  $d$  và đặt  $FG = a$ . Dựng cung chứa góc  $\beta$  trên đoạn  $MN$  cắt  $d$  ở  $M$ . Sau đó từ  $F$  dựng đường thẳng song song với  $GM$  cắt  $EM$  kéo dài ở  $I$ .

Bài toán có 2 nghiệm hình, 1 nghiệm hình hoặc vô nghiệm nếu cung chứa góc  $\beta$  cắt  $d$  tại 2 điểm, tiếp xúc với  $d$  hoặc không cắt  $d$ .

Đặc biệt nếu  $EF \parallel d$  và  $EF = a$  thì bài toán vô nghiệm.

**Bài 7.** Ta

xét 2 trường hợp (với điều kiện  $I, A, B$  không thẳng hàng):



H.35

a)  $A$  và  $B$  nằm trên một cạnh góc vuông (hình 35a).

Điểm  $M$  phải thoả mãn 2 điều kiện:

- nằm trên đường tròn (I)
- nằm trên đường tròn đường kính AB.

Do đó M phải là giao điểm của hai đường tròn này.

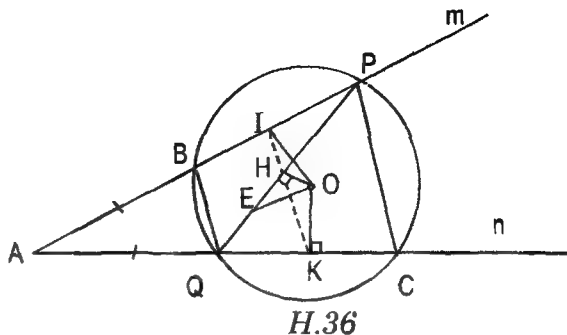
b) A và B nằm trên một cạnh góc vuông và cạnh huyền (hình 35b).

Khi đó đỉnh M phải là giao điểm của NA với đường tròn (I) và đỉnh P phải là giao điểm của NI với (I).

**Bài 8.** Giả sử cát tuyến PQ đã dựng được (hình 36). Trên Am lấy điểm B và trên An lấy điểm C sao cho  $AB = AQ$  và  $AC = AP$ . Ta có  $BQ \parallel PC$  và  $BP = QC$ . Suy ra tứ giác BPCQ là hình thang cân. Nếu vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác này và hạ  $OI \perp BP$ ,  $OK \perp QC$  thì  $IB = IP$ ,  $KQ = KC$ . Do đó  $AI + AK = AP + AQ$ , suy ra  $AI = AK = \frac{P}{2}$ . Ta xác định

được hai điểm I và K.

Gọi H là giao điểm của IK và PQ. Xét tam giác BPQ có IH là đường trung bình, suy ra  $OH \perp PQ$ . Do đó H sẽ nằm trên đường tròn đường kính BO.



Ta có cách dựng sau:

- Trên Am và An theo thứ tự lấy hai điểm I và K sao cho  $AI = AK = \frac{P}{2}$ .
- Từ I và K dựng các đường vuông góc với Am và An cắt nhau tại O;

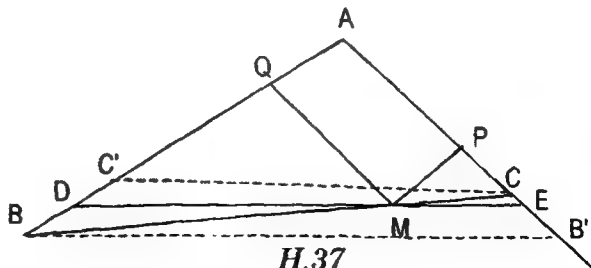
- Dựng đường tròn đường kính EO cắt IK tại H;
- Nối EH cắt Am và An theo thứ tự tại P và Q.

Ta được cát tuyến PQ cần dựng.

Tùy thuộc vào giao điểm của đường tròn đường kính EO với IK mà bài toán có 2 nghiệm hình, 1 nghiệm hình hoặc vô nghiệm.

### Bài 9.

Điểm M trước hết phải nằm trên cạnh đáy BC. Ngoài ra M phải thuộc quỹ tích những điểm



H.37

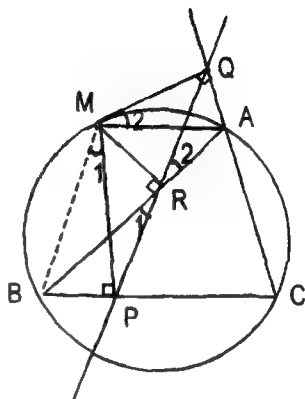
mà khi kẻ những đường thẳng song song với hai cạnh của góc A ta có  $MP + MQ = p$ . Do đó M nằm trên cạnh đáy DE của tam giác cân ADE mà  $AD = AE = p$  (hình 37).

Vậy M là giao điểm của BC với DE.

Nếu ta lấy  $AC' = AC$ ,  $AB' = AB$  thì đoạn DE phải nằm giữa hai đường thẳng  $CC'$  và  $BB'$  song song với nó, do đó độ dài p phải nằm giữa hai độ dài AC và AB.

Nếu  $DE \parallel BC$  tức là tam giác ABC cân thì bài toán sẽ vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm hình.

**Bài 10.** Từ M ta hạ các đường vuông góc MP, MQ, MR xuống ba cạnh của tam giác ABC



H.38

(hình 38). Ta giả sử rằng ba điểm P, Q, R nằm trên một đường thẳng.

Ta có  $\widehat{BRP} = \widehat{ARQ}$  (đối đỉnh). Từ P và R ta nhìn MB dưới một góc vuông nên tứ giác MBPR nội tiếp được. Suy ra  $\widehat{R_1} = \widehat{M_1}$  (cùng chắn cung BP). Tứ giác MQAR cũng nội tiếp được nên  $\widehat{R_2} = \widehat{M_2}$ . Suy ra  $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ . Do đó  $\widehat{MBP} = \widehat{MAQ}$  (vì là góc phụ của hai góc bằng nhau  $\widehat{M_1}$  và  $\widehat{M_2}$ )

Mà  $\widehat{MAQ} + \widehat{MAC} = 180^\circ$ . Suy ra  $\widehat{MBP} + \widehat{MAC} = 180^\circ$ .

Vậy tứ giác AMBC nội tiếp được và M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đường thẳng PRQ chính là *đường thẳng Simson*.

# Chương III

## BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

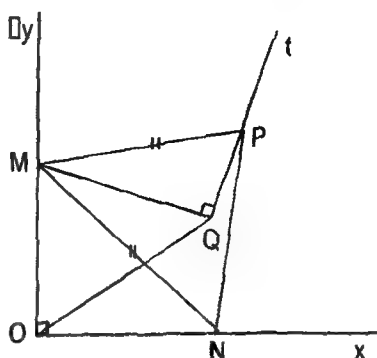
### (có xét giới hạn)

## I. QUỸ TÍCH LÀ ĐOẠN THẲNG, CUNG TRÒN

### 10 BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

**Bài 1.** Cho góc vuông  $xOy$ . Một tam giác đều  $MNP$  biến thiên có đỉnh  $M$  cố định trên  $Oy$ , đỉnh  $N$  di động trên  $Ox$ . Tìm quỹ tích đỉnh thứ ba  $P$ .

**Hướng dẫn.** Cho đỉnh  $N$  trùng với điểm  $O$  (hình 39) thì tam giác đều  $MNP$  sẽ thành tam giác đều  $MOQ$ . Sau đó chứng minh hai tam giác  $MQP$  và  $MON$  bằng nhau để suy ra  $\widehat{MQP}$  vuông. Do  $Q$  cố định nên tìm được quỹ tích của  $P$ .



H.39

**Cách giải**

- **Thuận:** Cho đỉnh  $N$  trùng với điểm  $O$ . Khi đó tam giác đều  $MNP$  sẽ thành tam giác đều  $MOQ$ . Do  $O$  và  $M$  cố định nên  $Q$  cũng cố định (hình 39).

Ta có  $\triangle MQP = \triangle MON$  (c.g.c). Suy ra  $\widehat{MQP} = \widehat{MON} = 90^\circ$ . Vậy đỉnh  $P$  chạy trên đường vuông góc với  $MQ$  tại  $Q$ .



- *Giới hạn:* Do P và O nằm ở hai phía của đường thẳng MQ nên P chỉ chạy trên tia Qt.

- *Đảo:* Lấy P' bất kì trên Qt. Trên Ox lấy đoạn  $ON' = QP'$ , ta phải chứng minh rằng  $\triangle MP'N'$  là tam giác đều (hình 40).

Thật vậy do  $MQ = MO$ ,  $QP' = ON'$  và  $\widehat{MQP'} = \widehat{MON'}$  nên hai tam giác vuông  $MQP'$  và  $MON'$  bằng nhau.

Suy ra  $MP' = MN'$ . Vì

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$  nên  $\widehat{OMQ} = \widehat{N'MP'} = 60^\circ$ . Do đó  $\widehat{MNP'} = \widehat{MP'N'} = 60^\circ$ .

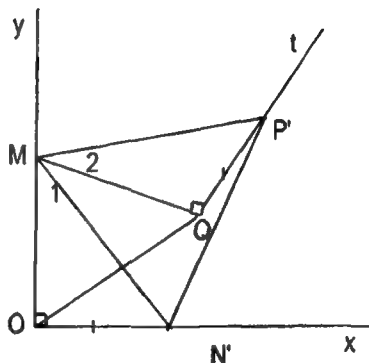
Vậy  $\triangle MP'N'$  đều.

- *Kết luận:* Quỹ tích đỉnh thứ ba P là tia Qt  $\perp$  MQ.

**Bài 2.** *Tìm quỹ tích những điểm M mà tổng các khoảng cách từ điểm đó tới hai đường thẳng cắt nhau bằng một độ dài a cho trước.*

*Nếu thay tổng các khoảng cách bằng hiệu các khoảng cách thì quỹ tích sẽ là gì?*

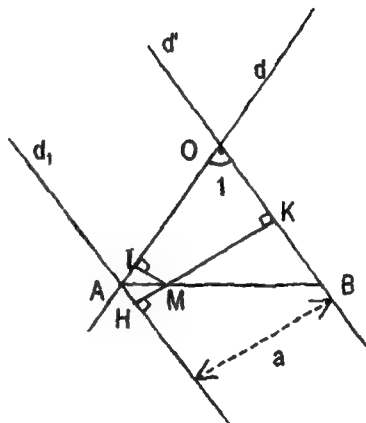
**Hướng dẫn:** Hãy xét trường hợp điểm M nằm ở một trong bốn góc do hai đường thẳng d và d' cắt nhau tạo thành (hình 41). Vì  $MI + MK = a$ , nên kẻ thêm đường thẳng  $d_1 \parallel d'$  và cách d' một khoảng đúng bằng a rồi áp dụng định lí: "Tổng các khoảng cách từ một điểm nằm trên đáy của một tam giác cân đến hai cạnh bên bằng đường cao thuộc cạnh bên", đường cao ở đây có độ dài bằng đoạn a.



H.40

### Cách giải

- *Thuận*: Kẻ đường thẳng  $d_1 \parallel d'$  và cách  $d'$  một khoảng bằng  $a$ . Gọi  $A$  là giao điểm của hai đường thẳng  $d_1$  và  $d$ . Theo bài ra ta có  $MI + MK = a$ .  $KM$  kéo dài cắt  $d_1$  tại  $H$  ta có  $MH + MK = a$ . Từ đó  $MI = MH$  tức là  $M$  cách đều hai cạnh của góc  $dAd_1$ , nên  $M$  nằm trên tia phân giác của góc này.



H.41

- *Giới hạn*: Do  $M$  nằm trong góc  $O_1$  nên  $M$  chỉ chạy trên đoạn  $AB$  là đáy của tam giác cân  $OAB$  ( $B$  là giao điểm của tia phân giác của góc  $dAd_1$  với  $d'$ ).

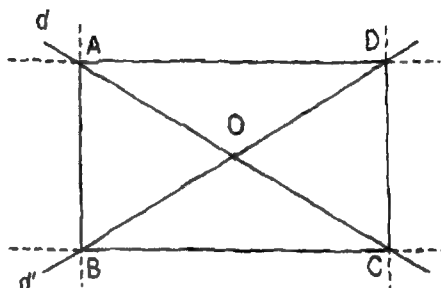
- *Đảo*: Lấy điểm  $M'$  trên đoạn  $AB$  ta kẻ  $M'I' \perp d$ ,  $M'K' \perp d'$  và  $M'H' \perp d_1$ .

Ta có:  $\triangle AM'I' = \triangle AM'H'$  (cạnh huyền, góc nhọn). Suy ra  $M'H' = M'I'$ .

Mà  $M'H' + M'K' = a$  nên  $M'I' + M'K' = a$ .

Tương tự ta xét tiếp các trường hợp  $M'$  ở các góc còn lại.

- *Kết luận*: Quỹ tích của  $M$  là 4 đoạn thẳng  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  và  $DA$  tạo thành



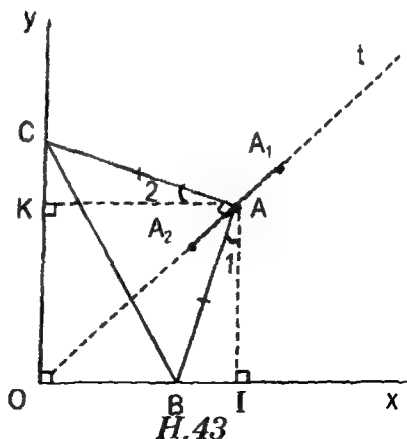
H.42

một hình chữ nhật ABCD (hình 42).

*Chú ý:* Nếu thay tổng các khoảng cách bằng hiệu các khoảng cách thì quỹ tích sẽ là 8 tia thuộc phần kéo dài các cạnh của hình chữ nhật ABCD (nét chấm chấm).

**Bài 3.** Cho góc vuông  $xOy$ . Một tam giác vuông cân ABC có diện tích không đổi và hai đầu B và C của cạnh huyền lần lượt chạy trên Ox và Oy. Tìm quỹ tích đỉnh A.

*Hướng dẫn:* Hãy xem đỉnh A khi chuyển động có cách đều hai cạnh của góc  $xOy$  không, tức là xét xem AI có bằng AK không (hình 43), AI và AK là các khoảng cách từ A đến Ox và Oy. Muốn vậy phải chứng minh rằng hai tam giác vuông AIB và AKC bằng nhau.



*Cách giải*

- *Thuận:* Từ A kẻ  $AI \perp Ox$ ,  $AK \perp Oy$  ta có  $IAK = 90^\circ$  ( $AIOK$  là hình chữ nhật)  $= BAC$ . Từ đó  $A_1 = A_2$  (cùng phụ với  $\widehat{BAK}$ ).

$\Delta AIB = \Delta AKC$  (c. huyền, g. nhọn). Suy ra  $AI = AK$ . Như vậy đỉnh A cách đều hai cạnh của góc vuông  $xOy$  nên A nằm trên tia phân giác Ot của góc vuông  $xOy$ .

- *Giới hạn:* Vì  $\Delta ABC$  có diện tích không đổi nên khi B tới O hoặc C tới O thì A tới  $A_1$ , còn khi  $ABOC$  là hình vuông thì A tới  $A'_2$ . Do đó A chỉ chạy trên đoạn  $A_1A_2$  của tia phân giác Ot.

- *Đảo.* Lấy điểm A' bất kì trên đoạn  $A_1A_2$  của tia phân giác Ot, ta có  $A'I' = A'K'$ . Qua A' kẻ tia A'B' tạo với A'I' góc

$A'_1$  và kẻ tia  $A'C'$  tạo với  $A'K'$  góc  $A'_2$  sao cho  $\widehat{A'_1} = \widehat{A'_2}$ . Nối  $B'C'$  ta phải chứng minh tam giác  $A'B'C'$  vuông cân tại  $A'$ .

Mặt khác do tứ giác  $A'K'OI'$  là hình chữ nhật nên  $\widehat{K'AI'} = 90^\circ$ . Suy ra  $\widehat{C'A'B'} = 90^\circ$ , tức là tam giác  $A'B'C'$  vuông cân tại  $A'$ .

- *Kết luận:* Quỹ tích đỉnh  $A$  là đoạn  $A_1A_2$  nằm trên tia phân giác  $Ot$  của góc vuông  $xOy$ .

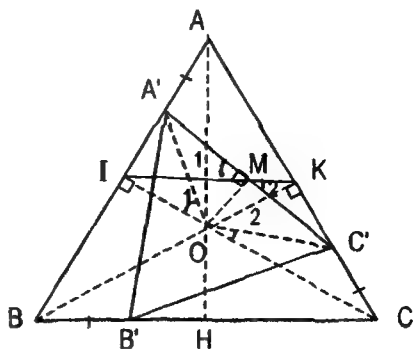
**Bài 4.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Trên các cạnh của tam giác lấy ba điểm  $A', B', C'$  ( $A' \in AB, B' \in BC, C' \in AC$ ) sao cho  $AA' = BB' = CC'$ . Tìm quỹ tích trung điểm  $M$  của đoạn  $A'C'$  khi  $A'$  và  $C'$  chạy trên các cạnh của tam giác  $ABC$  mà vẫn thoả mãn  $AA' = CC'$ .

*Hướng dẫn.* Gọi  $IK$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$ , hãy chứng minh rằng  $M$  nằm trên  $IK$ , tức là ba điểm  $I, M, K$  thẳng hàng. Trước tiên có thể xét trường hợp đặc biệt khi  $A'$  tới  $I$  thì  $C'$  tới  $K$  và  $M$  sẽ nằm trên  $IK$  (hình 44).

*Cách giải*

- *Thuận:* Do  $\Delta ABC$  đều nên các đường cao hạ từ  $B$  và  $C$  sẽ đi qua  $K$  và  $I$  là trung điểm của  $AC$  và  $AB$ . Ta có  $O$  là tâm đường ngoại tiếp  $\Delta A'B'C'$  đều.

Xét trường hợp đặc biệt khi  $A'$  và  $C'$  lần lượt trùng với  $I$  và  $K$  thì  $M$  nằm trên  $IK$ . Nếu  $A'$  không trùng với  $I$  thì bốn điểm  $A', M, O, I$  nằm trên đường tròn (do  $OI \perp AB$  và  $OM \perp A'C'$ ) nên  $\widehat{M_1} = \widehat{O_1}$  (cùng chắn cung  $IA'$ ). Tương tự  $\widehat{M_2} = \widehat{O_2}$



H.44

(cùng chắn cung KC').

Xét hai tam giác vuông AIO và OKC bằng nhau vì có:  
 $OA = OC$  (vì  $\triangle ABC$  đều),  $AI = CK = \frac{1}{2}AC$ ,  $\widehat{OAI} = \widehat{OCK} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$   
 Suy ra  $\triangle A'IO = \triangle C'KO$  (c. góc vuông, g. nhọn), nên  $\widehat{OI} = \widehat{OK}$   
 từ đó  $\widehat{MI} = \widehat{MK}$ . Suy ra ba điểm I, M, K thẳng hàng, tức là  
 M nằm trên đường trung bình IK của  $\triangle ABC$ .

- *Giới hạn*: Do  $\triangle A'B'C'$  nằm trong  $\triangle ABC$  nên M chỉ chạy  
 trên IK, trừ hai điểm I và K.

- *Đảo*: Lấy điểm M' bất kì trên IK (M' khác I và K). Qua  
 M' kẻ đường vuông góc với OM' cắt AB tại A' và AC tại C'.  
 Ta phải chứng minh rằng M' là trung điểm của A'C' và  $AA' = CC'$  (Bạn đọc tự chứng minh).

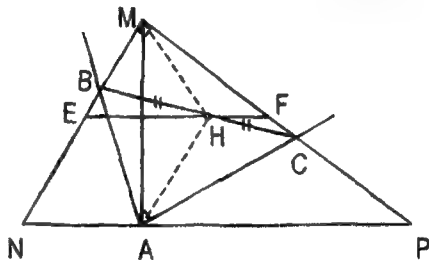
- *Kết luận*: Quỹ tích trung điểm M của A'C' là đường  
 trung bình của  $\triangle ABC$  đều, trừ hai đầu I và K.

**Bài 5.** Cho tam giác MNP vuông tại M có đường cao  
 MA. Một góc vuông đỉnh A quay xung quanh A sao cho hai  
 cạnh góc vuông cắt MN và MP theo thứ tự tại B và C. Tìm  
 quỹ tích trung điểm H của cạnh huyền BC.

*Hướng dẫn*: Nối H với M và A chứng minh  $HM = HA$ .  
 Từ đó suy ra quỹ tích  
 của H. Lưu ý đến hai vị  
 trí đặc biệt của góc  
 vuông BAC là  $\widehat{MAN}$   
 và  $\widehat{MAP}$ .

**Cách giải**

- *Thuận*: Nối HM và  
 HA (hình 45). Trong tam  
 giác vuông BMC ta có



H.45

MH là trung tuyến nên  $MH = \frac{1}{2}BC$ . Tương tự trong tam giác vuông BAC ta có  $AH = \frac{1}{2}BC$ . Suy ra  $HM = HA$ . Vậy H nằm trên đường trung trực của MA.

- *Giới hạn*: Khi B trùng với M thì C trùng với P, lúc đó H sẽ trùng với trung điểm F của cạnh MP. Khi B trùng với N thì C trùng với M, lúc đó H sẽ trùng với trung điểm E của cạnh MN. Do đó H chỉ chạy trên đoạn EF là đường trung bình của tam giác MNP.

- *Đảo*: Lấy điểm H' bất kì trên đoạn EF. Qua H' kẻ B'C' sao cho H' là trung điểm của B'C' bằng cách lấy H'B' = H'M rồi kéo dài B'H' đến khi cắt MP tại C'. Ta phải chứng minh rằng góc B'AC' vuông tại A.

Thật vậy, do H'B' = H'M = H'A nên ta có H'B' = H'C' = H'A =  $\frac{1}{2}B'C'$ . Tam giác B'AC' có trung tuyến AH' bằng nửa cạnh B'C' là tam giác vuông tại A.

- *Kết luận*: Quỹ tích của H là đường trung bình EF của tam giác vuông MNP.

**Bài 6.** Cho đường tròn (O, R) và điểm P cố định sao cho  $PO = 2R$ . Một điểm A chuyển động trên (O) sao cho tia phân giác góc POA cắt PA tại B. Tìm quỹ tích của B.

*Hướng dẫn.* Xét tam giác POA và áp dụng tính chất đường phân giác OB của góc O để suy ra tỉ số  $\frac{PB}{PA} = \frac{2}{3}$ . Từ đó bằng phương pháp đồng dạng suy ra quỹ tích của B là đường tròn tâm I đồng dạng với đường tròn (O) theo tỉ số đồng dạng  $\frac{2}{3}$ .

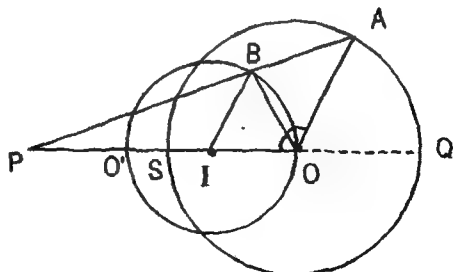
### Cách giải

- *Thuận*: Trong tam giác POA, theo tính chất đường phân giác OB của góc POA ta có (hình 46):

$$\frac{BP}{BA} = \frac{OP}{OA} = \frac{2R}{R} = 2$$

$$\text{Suy ra } \frac{PB}{PA} = \frac{PB}{PB + BA} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Do A chuyển động trên đường tròn (O) nên B sẽ chuyển động trên đường tròn tâm I đồng dạng với (O) trong phép đồng dạng tâm I tỉ số  $\frac{2}{3}$ , I là điểm trên PO thỏa mãn  $\frac{PI}{PO} = \frac{2}{3}$ . Đường tròn (I) có bán kính bằng  $\frac{2}{3}R$ .



H.46

- *Giới hạn*: Khi A trùng với Q giao điểm của PO với đường tròn (O) thì B trùng với O, tia phân giác góc POA suy biến thành điểm O.

Khi A trùng với S đối tâm với Q trong (O) thì B trùng với S, tia phân giác trùng với OO', O' là điểm đối tâm với O trong (I).

- *Đảo*: Lấy điểm B' bất kì ở trên đường tròn (I). Nối PB' cắt đường tròn (O) tại A'. Ta phải chứng minh rằng OB' là tia phân giác của góc POA'.

Thật vậy do hai đường tròn (I) và (O) đồng dạng nên ta suy ra  $\frac{OP}{OA} = \frac{B'P}{B'A'} = 2$ . Do đó OB' là tia phân giác của góc POA'.

- *Kết luận:* Quỹ tích của B là đường tròn tâm I đồng dạng với đường tròn (O) đã cho, trừ hai điểm O và O' đối tâm của (I).

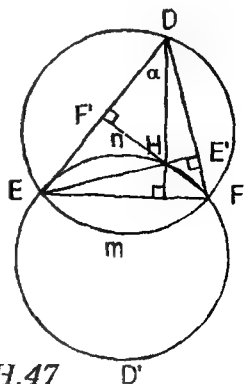
**Bài 7.** Một tam giác DEF có đáy EF cố định, góc D không đổi và bằng  $\alpha$ . Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác.

**Hướng dẫn.** Vì đỉnh D nhìn EF cố định dưới một góc không đổi  $\alpha$  nên D phải nằm trên cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên EF. Hãy tính góc EHF theo  $\alpha$  để thấy H cũng nằm trên một cung chứa góc khác.

Điểm H lại phải nằm trên đường cao hạ từ D. Từ đó xác định được quỹ tích điểm H.

Ngoài ra cần xét thêm các trường hợp góc  $\alpha$  là nhọn, tù hoặc vuông.

- *Thuận:* Vì đỉnh D nhìn EF cố định dưới một góc  $\alpha$  nên quỹ tích của D là hai cung chứa góc EDF và  $ED'F$  đối xứng nhau qua EF (hình 47). Gọi E' và F' là chân hai đường cao hạ từ E và F ta có tứ giác DF'HE' nội tiếp, suy ra  $\widehat{F'HE'} = 180^\circ - \alpha = \widehat{EHF}$ .



Từ H nhìn EF dưới một góc  $\widehat{EHF}$  không đổi là góc bù của  $\alpha$  nên quỹ tích của H là hai cung chứa góc  $180^\circ - \alpha$ , đó là hai cung EmF và EnF đối xứng nhau qua EF. Mặt khác H lại phải nằm trên đường cao hạ từ D.

- *Giới hạn:* Nếu góc  $\alpha$  nhọn mà  $\hat{E}$  hoặc  $\hat{F}$  là góc tù và điểm H nằm ngoài tam giác DEF thì  $\widehat{EHF} = 90^\circ - \widehat{DFH} = \alpha$ . Lúc này H chạy trên hai cung I'E'K' và IEFK (hình 48a), trong đó II' và KK' là những đường vuông góc với EF tại E và F.

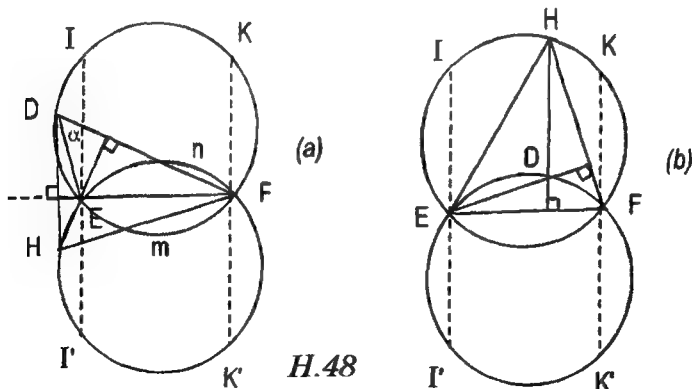
Nếu góc  $\alpha$  tù và các cung nhỏ EmF và EnF đều là quỹ



tích của đỉnh D, điểm H nằm giữa hai đường vuông góc  $II'$  và  $KK'$  thì H chạy trên hai cung IK và  $I'K'$  (hình 48b).

Nếu góc  $\alpha$  vuông thì điểm H trùng với điểm D, lúc đó H chạy trên hai cung EmF và EnF.

- *Đảo:* Bạn đọc tự chứng minh.



- *Kết luận:* Quỹ tích trực tâm H là cung nhỏ EnF nếu  $\alpha$  nhọn (E và F nhọn), là hai cung  $I'EFK'$  và  $IEFK$  nếu  $\alpha$  nhọn mà E hoặc F tù, là hai cung IK và  $I'K'$  nếu  $\alpha$  tù và là hai cung EmF và EnF nếu  $\alpha$  vuông.

**Bài 8.** Cho ba điểm A, B, C cố định trên đường thẳng d (B nằm giữa A và C) và hai nửa đường thẳng Ax, Cy cùng vuông góc với d về cùng một phía. Một góc vuông mBn quay xung quanh B có các cạnh cắt Ax, Cy theo thứ tự tại M và N. Tìm quỹ tích hình chiếu H của B trên đường thẳng MN.

**Hướng dẫn.** Chứng minh các tứ giác AMHB và BHNC nội tiếp được (hình 49). Suy ra  $\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ . Từ đó suy ra quỹ tích của H.

**Cách giải:**

- *Thuận:* Nối HA, HC. Do  $\widehat{MBN} = 90^\circ$  nên  $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = 90^\circ$ .

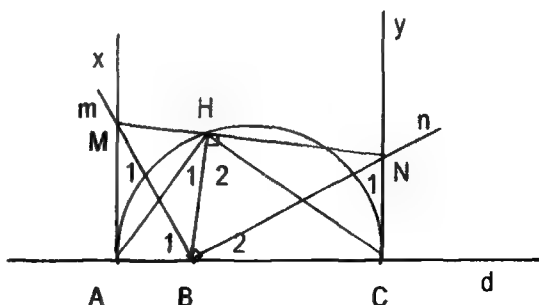
Mà các góc tại A và C đều vuông nên  $\widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 = 90^\circ$ .

Tứ giác AMHB có hai góc đối A và H vuông nên nội tiếp được. Do đó  $\widehat{H}_1 = \widehat{M}_1$  (cùng chắn cung AB). Tương tự tứ giác BHNC cũng nội tiếp được nên  $\widehat{H}_1 = \widehat{N}_1$ .

Suy ra  $\widehat{AHC} = \widehat{H}_1 + \widehat{H}_1 = \widehat{M}_1 + \widehat{N}_1 = 90^\circ$ .

Điểm H nhìn đoạn AC cố định dưới một góc vuông nên H nằm trên đường tròn đường kính AC.

- *Giới hạn:* Do H nằm trong nửa mặt phẳng chứa hai nửa đường thẳng Ax và Cy nên H chỉ chạy trên nửa đường tròn đường kính AC thuộc nửa mặt phẳng đó, trừ cả hai điểm A và C.



H.49

- *Đảo:* Lấy điểm H' trên nửa đường tròn đường kính AC ta có  $\widehat{A'H'C}$  vuông. Từ B kẻ tia Bm tạo với Ax góc M' bằng góc H'. Nối M'H' cắt Cy tại N', ta phải chứng minh rằng  $\widehat{M'BN'} = 90^\circ$ .

Thật vậy xét tam giác vuông M'AB ta có  $\widehat{B}_1 = 90^\circ - \widehat{M}_1$ . Tương tự ta có  $\widehat{H}_2 = \widehat{N}_1$  nên  $\widehat{B}_2 = 90^\circ - \widehat{N}_1$ , mà  $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = 90^\circ$  suy ra  $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 90^\circ$ . Do đó  $\widehat{M'BN'} = 90^\circ$ .

- *Kết luận:* Quỹ tích của điểm H là nửa đường tròn

đường kính AC, trừ hai điểm A và C.

**Bài 9.** Cho đường tròn  $(O)$ ,  $P, Q$  là hai điểm cố định,  $S$  là điểm chuyển động trên  $(O)$ . Tìm quỹ tích các hình chiếu  $E$  của  $P$  và  $F$  của  $Q$  trên tia phân giác của góc  $PSQ$ .

**Hướng dẫn.** Gọi  $T$  là giao điểm của tia phân giác của góc  $PSQ$  với đường tròn  $(O)$ ,  $T$  là điểm cố định, do đó hai đoạn  $PT$  và  $QT$  là những đoạn cố định. Từ đó suy ra quỹ tích của  $E$  và của  $F$ .

**Cách giải**

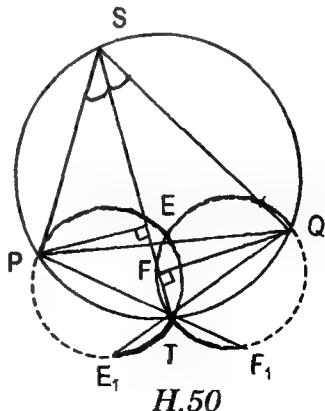
- **Thuận:** Tia phân giác của góc  $PSQ$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $T$  là trung điểm của cung nhỏ  $PQ$ . Do đó  $T$  là điểm cố định (hình 50).

Hình chiếu  $E$  của  $P$  trên tia phân giác luôn nhìn đoạn  $PT$  cố định dưới một góc vuông nên  $E$  nằm trên đường tròn đường kính  $PT$ . Tương tự hình chiếu  $F$  của  $Q$  nằm trên đường tròn đường kính  $TQ$ .

- **Giới hạn:** Khi  $S$  ở  $P$  thì  $E$  ở  $P$ . Khi  $S$  ở  $Q$  thì  $E$  ở  $E_1$  là giao điểm của  $QT$  với đường tròn đường kính  $TP$ , do đó  $E$  chỉ chạy trên cung  $PTE_1$ .

Tương tự  $F$  chỉ chạy trên cung  $QT F_1$  trong đó  $F_1$  là giao điểm của  $TP$  với đường tròn đường kính  $TQ$ .

- **Đảo:** Lấy điểm  $E'$  bất kì trên cung  $PTE_1$ . Nối  $E'T$ , tia  $TE'$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $S'$ , ta phải chứng minh  $S'T$  là tia phân giác của góc  $PS'Q$ . Thật vậy do  $E'$  nằm trên cung  $PTE_1$  nên góc  $PE'T$  vuông tức là  $E'$  là hình chiếu của  $P$  trên  $S'T$ . Mặt khác  $T$  là trung điểm của cung nhỏ  $PQ$  nên  $S'T$  là tia



H.50

phân giác của góc  $PS'Q$ . Tương tự ta chứng minh với điểm  $F'$  bất kỳ trên cung  $QTF_1$ .

- *Kết luận*: Quỹ tích của  $F$  là cung  $QTF_1$  của đường tròn đường kính  $TQ$  và quỹ tích của  $E$  là cung  $PTE_1$  của đường tròn đường kính  $PT$ .

**Bài 10.** Dựa vào quỹ tích cơ bản  $MA^2 + MB^2 = k^2$ , hãy tìm quỹ tích những điểm  $M$  sao cho:

a)  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$

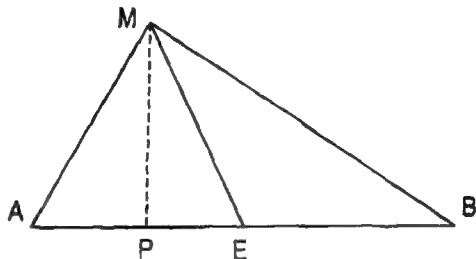
b)  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$

trong đó  $A, B, C, D$  là những điểm cố định cho trước.

*Hướng dẫn.*

a) Gọi  $E$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ , ta có hệ thức  $MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$  (\*) trong đó  $ME$  là trung tuyến của tam giác  $MAB$ . Hệ thức  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$  trở thành  $2ME^2 + MC^2 = k^2 - \frac{AB^2}{2}$ . Từ đó suy ra quỹ tích của điểm  $M$ , bằng cách xét từng trường hợp đặc biệt khi điểm  $C$  trùng với trung điểm  $E$  của  $AB$ .

b) Gọi  $E$  và  $F$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ , rồi áp dụng hệ thức tương tự như (\*) vào các tam giác  $MAB$  và  $MCD$  để tính được tổng  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ . Từ đó suy ra quỹ tích của  $M$ .



H.51

*Cách giải*

a) Xét tam giác  $MAB$  với  $ME$  là trung tuyến ta có hệ

thức (hình 51):  $MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$ .

Như vậy hệ thức đã cho trở thành:

$$2ME^2 + \frac{AB^2}{2} = k^2 - \frac{AB^2}{2} = k'^2 (**)$$

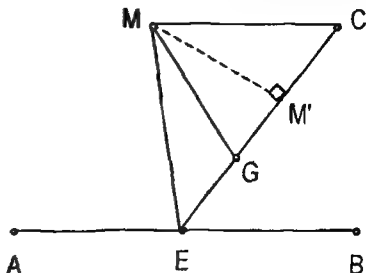
Xét trường hợp đặc biệt khi C trùng với E. Trong tam giác MAC với MP là trung tuyến ta có:

$$MA^2 + MC^2 = 2MP^2 + \frac{AC^2}{2}.$$

Khi đó hệ thức đã cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k^2$  trở thành:

$$2MP^2 + MB^2 = k^2 - \frac{AC^2}{2} = k''^2.$$

Quỹ tích những điểm M thoả mãn hệ thức cuối này là đường tròn tâm C với C là điểm trên PB sao cho  $2CP = CB$ . Suy ra quỹ tích những điểm M thoả mãn (\*\*) là đường tròn tâm G trên đoạn CE sao cho  $2GE = GC$  (G là trọng tâm của  $\triangle ABC$ ) (hình 52).



H.52

Thật vậy, gọi  $M'$  là hình chiếu của M trên CE, trong tam giác MGE ta có:  $ME^2 = MG^2 + EG^2 + 2 \cdot EG \cdot GM'$ . Trong tam giác MGC lại có:  $MC^2 = MG^2 + GC^2 - 2GC \cdot GM'$  (nếu góc MGE nhọn thì góc MGC tù trong biểu thức của  $ME^2$  ta có  $-2GE \cdot GM'$ , còn trong biểu thức của  $MC^2$  thì ta lại có  $+2GE \cdot GM'$ ).

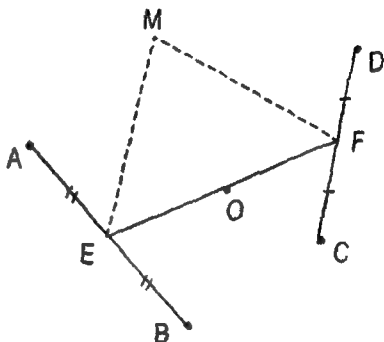
Do  $2GE = GC$  nên:  $2ME^2 + MC^2 = 3MG^2 + 2EG^2 + GC^2$  tức là hệ thức (\*\*) tương đương với  $3MG^2 = k^2 \cdot \frac{AB^2}{2} - 2EG^2 - GC^2$ .

Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn tâm G bán kính tính được theo hệ thức cuối này.

b) Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD (hình 53) ta có:

$$MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$MC^2 + MD^2 = 2MF^2 + \frac{CD^2}{2}.$$



H.53

Cộng từng vế hai đẳng thức này được:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(ME^2 + MF^2) + \frac{AB^2 + CD^2}{2}.$$

Do đó hệ thức đã cho  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$  tương đương với  $ME^2 + MF^2 = \frac{2k^2 - AB^2 - CD^2}{4}$ .

Vậy quỹ tích của điểm M là đường tròn mà tâm là trung điểm O của EF.

## 5 BÀI TOÁN TỰ GIẢI

### ĐỀ BÀI

**Bài 1.** Một điểm P chạy trên đoạn thẳng MN cố định. Dựng về cùng một phía của MN hai tam giác vuông cân MQP và PSN. Tìm quỹ tích của các điểm Q, S và trung điểm T của QS.

**Bài 2.** Nội một điểm A bất kì trên một cung tròn với hai đầu B và C của nó. Tìm quỹ tích.

a) Tâm I của đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC.

b) Tâm K của đường tròn bàng tiếp trong góc A.

**Bài 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Về phía ngoài của tam giác dựng hai nửa đường tròn đường kính  $AB$  và  $AC$ . Một cát tuyến di động qua  $A$  cắt nửa đường tròn đường kính  $AB$  tại  $P$  và nửa đường tròn đường kính  $AC$  tại  $Q$ . Tìm quỹ tích trung điểm  $S$  của  $PQ$ .

**Bài 4.** Một đường thẳng di động  $m$  đi qua đỉnh  $M$  của một tam giác  $MNP$  cân tại  $M$ . Trên  $m$  lấy một điểm  $S$  sao cho tổng  $SN + SP$  là nhỏ nhất. Tìm quỹ tích của  $S$ .

**Bài 5.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  ( $AB = AC$ ) và  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Một điểm  $K$  chuyển động trên đoạn  $IA$ . Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $BK$  cắt  $BK$  tại  $M$  và  $BC$  tại  $N$ .

a) Tìm quỹ tích của  $M$ .

b) Gọi  $P$  là điểm đối xứng của  $I$  qua  $AN$ , tìm quỹ tích của  $P$ .

## HƯỚNG DẪN CÁCH GIẢI

**Bài 1. Hướng dẫn.** Các tam giác vuông cân đều có góc ở đáy bằng  $45^\circ$  nên giao điểm  $R$  của hai đường thẳng  $MQ$  và  $NS$  là cố định. Từ đó tìm được quỹ tích của  $Q$  và  $S$  (hình 54).

Để tìm quỹ tích của  $T$  lưu ý tứ giác  $PQRS$  là hình chữ nhật mà  $T$  là giao điểm của hai đường chéo. Từ đó chứng minh khoảng cách từ  $T$  đến  $MN$  không đổi. Suy ra quỹ tích của  $T$ .

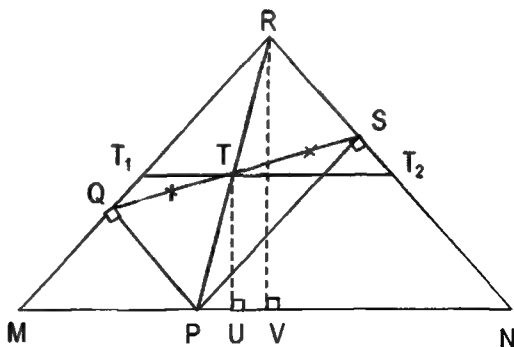
- **Thuận:** Các tam giác  $MQP$  và  $PSN$  vuông cân nên các góc ở đáy đều bằng  $45^\circ$ . Suy ra tam giác  $MRN$  cũng vuông cân và  $R$  là điểm cố định. Vậy  $Q$  và  $S$  lần lượt chạy trên các cạnh  $MR$  và  $NR$  của tam giác vuông cân  $MRN$ .

Tứ giác PQRS là hình chữ nhật và trung điểm T của QS là giao điểm hai đường chéo bằng nhau. Suy ra  $TP = TR$ . Hạ TU và RV cùng vuông góc với MN. Ta có  $TU \parallel RV$ , trong tam giác PRV đoạn TU là đường trung bình nên  $TU = \frac{1}{2}RV$  = không đổi, vậy T cách MN một đoạn không đổi bằng  $\frac{1}{4}MN$  nên T chạy

trên đường thẳng song song với MN đi qua trung điểm của đường cao RV của tam giác MRN.

*Giới hạn:* Do P chỉ chạy trên đoạn thẳng MN nên Q và S chỉ chạy trên cạnh MR và NR,

còn T chỉ chạy trên đường trung bình  $T_1T_2$  của tam giác vuông cân MRN.



H.54

*Đảo:* Bạn đọc tự chứng minh.

*Kết luận:* Quỹ tích các điểm Q, S và T theo thứ tự là cạnh MR, NR và đường trung bình  $T_1T_2$  của tam giác vuông cân MRN.

**Bài 2. Hướng dẫn.**

a) Dù A ở vị trí nào trên cung lớn BC thì góc A vẫn không đổi. Muốn tìm tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC chỉ cần vẽ hai phân giác của các góc B và C để được tâm I. Từ đó tính được  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$  không đổi. Suy ra quỹ tích của I.



b) Do tính đối xứng ta chỉ cần vẽ hai phân giác ngoài của B và C rồi tính góc  $\widehat{BKC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$  không đổi. Suy ra quỹ tích của K.

a) *Thuận*: Gọi I là giao điểm hai phân giác trong của các góc B và C ta có:  $\widehat{BIC} = 180^\circ - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$  hay  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$  (hình 55).

Vậy I nằm trên cung chứa góc  $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$  dựng trên BC.

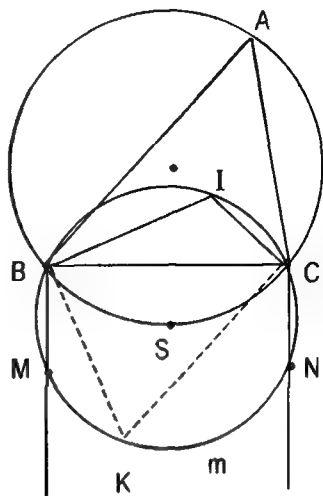
- *Giới hạn:* Nếu A trùng với B hoặc với C thì tam giác ABC suy biến thành đoạn thẳng BC.

- **Đảo:** Lấy I' là điểm bất kì trên cung BC ta

$$\widehat{BI'C} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}. \text{ Do đó}$$

$\widehat{I'BC} + \widehat{I'CB} < 90^\circ$ . Nếu ta gấp đôi các góc này thì các đường thẳng  $BA'$  và  $CA'$  cắt nhau phía trên  $BC$  vì  $\widehat{CBA'} + \widehat{BCA'} < 180^\circ$ , ta có  $\widehat{BI'C} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ , vậy  $\widehat{A'} = \widehat{A}$

và điểm  $A'$  sẽ ở trên cung tròn đã cho.



**H.55**

Lưu ý là tâm của cung chứa góc chính là trung điểm S của cung nhỏ BC.

b) - *Thuận*: Do tính đối xứng ta kẻ hai phân giác ngoài của B và C cắt nhau tại K. Ta tính được dễ dàng  $\widehat{BKC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$  (đơn giản nhất là lưu ý rằng tứ giác IBKC nội tiếp được do có tổng hai góc đối bằng  $180^\circ$ ), vậy K nằm trên cùng đường tròn của I.

- *Giới hạn*: Tâm K chỉ chạy trên cung MmN trong đó M và N theo thứ tự là giao điểm của cung tâm S với hai đường vuông góc với BC kẻ từ B và C.

- *Đảo*: Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận chung*: Quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC là cung chứa góc  $90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$  dựng trên BC có tâm S

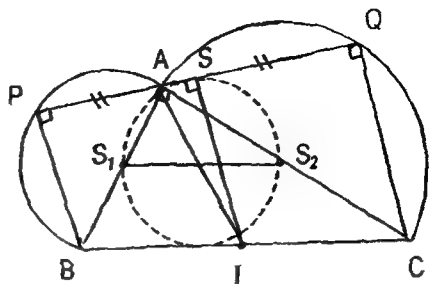
S là trung điểm của cung nhỏ BC, trừ hai điểm B và C.

Quỹ tích tâm K của đường tròn bàng tiếp trong góc A là cung MmN nằm trên đường tròn tâm S.

**Bài 3. Hướng dẫn.** Từ trung điểm I của cạnh huyền BC kẻ  $IS \parallel PB$  ta có IS là đường trung bình của hình thang BPQC. Chứng minh góc ASI vuông. Từ đó suy ra quỹ tích của S (hình 56).

- *Thuận*: Qua trung điểm I của cạnh huyền BC kẻ  $IS \parallel BP$  ta được đường trung bình IS của hình thang vuông BPQC (vì các góc P và Q là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra  $IS \perp PQ$ , tức là  $ASI = 90^\circ$ .

Điểm S nhìn đoạn AI cố định dưới một góc vuông nên S



H.56

chạy trên đường tròn đường kính AI.

- *Giới hạn*: Khi cát tuyến di động đến vị trí AB thì S trùng với  $S_1$  trên AB còn khi cát tuyến đến vị trí AC thì S trùng với  $S_2$  trên AC.

Ta có  $AI = S_1S_2$  vì  $AI = \frac{1}{2}BC$  và  $S_1S_2 = \frac{1}{2}BC$ .

- *Đảo*: Bạn đọc tự chứng minh.

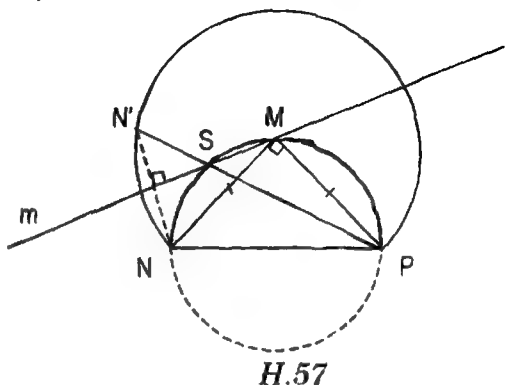
- *Kết luận*: Quỹ tích của S là nửa đường tròn đường kính  $S_1S_2$  (với  $S_1S_2 = AI$ ) là đường trung bình của tam giác vuông ABC.

**Bài 4. Hướng dẫn.** Xét hai trường hợp tùy theo đường thẳng m cắt đoạn NP hoặc không cắt đoạn NP. Nếu m cắt đoạn NP thì giao điểm thỏa mãn điều kiện đã cho. Nếu m không cắt đoạn NP thì ta lấy điểm  $N'$  đối xứng N qua m để chứng tỏ tổng  $SN + SP$  sẽ nhỏ nhất khi ba điểm P, S,  $N'$  thẳng hàng và S là giao điểm của  $PN'$  với m. Suy ra quỹ tích của N'. Sau đó chứng minh góc NSP không đổi và suy ra quỹ tích của S (hình 57).

- *Thuận*: Trường hợp m cắt đoạn NP thì giao điểm chính là điểm S thỏa mãn  $SN + SP$  nhỏ nhất. Vậy S chạy trên đoạn NP.

Bây giờ ta xét trường hợp m không cắt đoạn NP. Gọi  $N'$  là điểm đối xứng với N

qua đường thẳng m. Khi đó  $[SN + SP = SN' + SP]$ , suy ra tổng  $SN + SP$  nhỏ nhất khi ba điểm P, S,  $N'$  thẳng hàng và S là giao điểm của  $PN'$  với m.



Do  $MN = MN'$  nên khi  $m$  thay đổi thì  $N'$  chạy trên đường tròn tâm  $M$  bán kính  $MN$ .

**Xét tam giác  $SNN'$  cân tại  $S$  ta có:**

$\widehat{NSP} = \widehat{2NN'P} = \widehat{NMP}$  không đổi. Vậy S chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác NMP.

- *Giới hạn*: Vì  $m$  không cắt đoạn NP nên  $N'$  chỉ chạy trên cung lớn NP của đường tròn (M). Còn S chỉ chạy trên cung lớn NMP của đường tròn ngoại tiếp tam giác NMP.

- **Đảo:** Lấy điểm  $S'$  bất kỳ trên cung lớn  $NMP$  ta chứng minh rằng tổng  $S'N + S'P$  là nhỏ nhất. Thật vậy lấy  $N'$  là điểm đối xứng của  $N$  qua  $m$  ta có  $P, S', N'$  thẳng hàng và  $S'N + S'P = S'N' + S'P = PN'$  nhỏ nhất vì với mọi điểm  $S_1$  khác của  $m$  thì tổng  $S_1P + S_1N = S_1P + S_1N' > PN'$ .

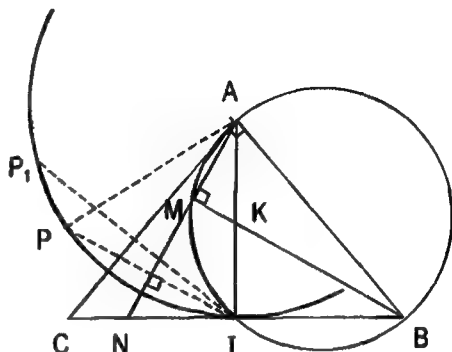
- *Kết luận:* Quỹ tích của S là đoạn NP nếu m cắt đoạn NP và là cung lớn NMP nếu m không cắt đoạn NP.

### Bài 5. Hướng dẫn.

a) M nhìn đoạn AB dưới một góc vuông từ đó suy ra quỹ tích của M (hình 58).

b) Do P và I đối xứng qua AN nên  $AP = AI$ , mà AI cố định từ đó suy ra quỹ tích của P.

- *Thuận:* a) Do góc AMB vuông (gt) nên M nhìn AB dưới một góc vuông, do đó M chạy trên đường tròn đường kính AB.



H.58

b) Ta có  $AP = AI$  vì  $P$  và  $I$  đối xứng qua  $AN$ . Mà  $AI$  cố định nên quỹ tích của  $P$  là đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AI$ .

- *Giới hạn:*

a) Khi K trùng với I thì M cũng trùng với I. Khi K trùng với A thì M cũng trùng với A. Vậy M chỉ chạy trên cung nhỏ AI (vẽ nét đậm).

b) Khi N trùng với I thì P cũng trùng với I. Khi N trùng với C thì P sẽ ở  $P_1$  đối xứng với I qua AC. Vậy P chỉ chạy trên cung nhỏ  $P_1$  (vẽ nét đậm).

- *Đảo:* Bạn đọc tự chứng minh.

- *Kết luận:* Quỹ tích của M là cung nhỏ AI thuộc đường tròn đường kính AB và quỹ tích của P là cung nhỏ  $IP_1$  thuộc đường tròn (A).

## II. QUAN HỆ GIỮA TOÁN QUỸ TÍCH VÀ TOÁN DỰNG HÌNH

Ở chương II ta đã xét một số bài toán về mối quan hệ khăng khít giữa toán dựng hình và toán quỹ tích. Bây giờ ta xét thêm một số bài toán minh họa khác mà "quỹ tích đường tròn" luôn được vận dụng.

### 10 BÀI TOÁN MINH HỌA

**Bài 1.** Dựng tam giác biết cạnh  $a$ , góc đối diện  $A$  và bán kính  $r$  của đường tròn nội tiếp.

**Bài 2.** Dựng tam giác ABC biết  $\hat{B} = \alpha$ , đường cao và trung tuyến xuất phát từ B đến cạnh đối AC.

**Bài 3.** Dựng tam giác DEF biết  $\hat{D} = \beta$ , cạnh  $EF = d$  và tỉ số  $\frac{DE}{DF} = \frac{p}{q}$ .

**Bài 4.** Từ một điểm P ở ngoài đường tròn (O) dựng một cát tuyến PAB sao cho tổng các khoảng cách từ các giao điểm A và B tới đường thẳng OP bằng một độ dài  $m$  cho trước.

**Bài 5.** Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  và tiếp tuyến  $Ax$ . Tìm trên  $(O)$  một điểm  $M$  sao cho tổng các khoảng cách đến hai đường thẳng  $AB$  và  $Ax$  bằng một độ dài  $s$  cho trước.

**Bài 6.** Dựng một tam giác biết hai góc  $\alpha, \beta$  và một trung tuyến  $m$ .

**Bài 7.** Dựng một tam giác biết một cạnh  $a$ , phân giác  $p$  và tổng hai cạnh  $b + c = k$ .

**Bài 8.** Dựng tam giác  $MNP$  biết cạnh  $MN = p$ ,  $\hat{P} = \alpha$  và tích  $PM \cdot PN = k^2$ .

**Bài 9.** Cho góc  $xSy$  và đường thẳng  $d$  bất kì đi qua điểm  $C$  trên cạnh  $Sx$ . Trên cạnh  $Sy$  lấy một điểm  $D$ . Tìm trên  $Sx$  một điểm  $P$  và trên  $Sy$  một điểm  $Q$  sao cho  $CP = DQ$  và đường thẳng  $d$  đi qua trung điểm của  $PQ$ .

**Bài 10.** Cho đường tròn  $(O)$ , một điểm  $M$  bất kì nằm trên và một điểm  $S$  nằm trong đường tròn đó. Tìm trên  $(O)$  hai điểm  $N$  và  $P$  sao cho:

- a)  $S$  là trọng tâm của tam giác  $MNP$ ;
- b)  $S$  là trực tâm của tam giác  $MNP$ .

## SƠ LƯỢC CÁCH GIẢI

**Bài 1.** Giả sử  $ABC$  là tam giác phải dựng (hình 59) và  $I$  là giao điểm hai phân giác trong của góc  $B$  và  $C$ , ta có:

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}.$$

Như vậy trong tam giác  $BIC$  ta biết cạnh đáy  $BC$ , góc đối diện  $I$  và đường cao  $r$ . Do đó có cách dựng sau:

Dựng đoạn  $BC = a$ , rồi dựng cung chứa góc  $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$  và

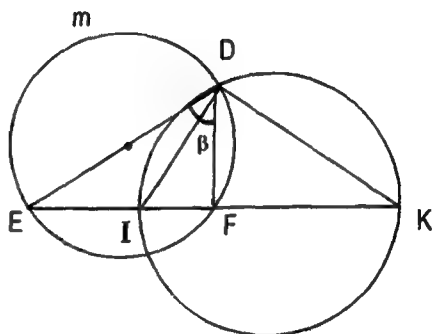


- Quỹ tích những điểm nhìn EF dưới góc  $\beta$ , tức nằm trên cung EmF chứa góc  $\beta$ .

- Quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến E và F bằng  $\frac{p}{q}$ , tức là nằm

trên đường tròn đường kính IK, I và K là hai điểm mà  $\frac{IE}{IF} = \frac{KE}{KF} = \frac{p}{q}$  (trên hình vẽ

ta giả sử  $\frac{p}{q} > 1$ ).



H.61

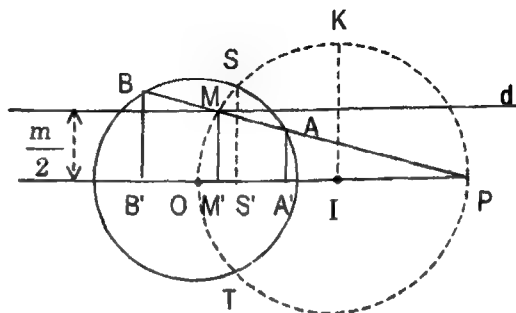
Bài toán luôn có một nghiệm hình.

**Bài 4.** Ta phải có  $AA' + BB' = m$  (hình 62). Nếu từ trung điểm M của AB ta kẻ đường vuông góc với OP ta có:

$$MM' = \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{m}{2}.$$

Do đó M sẽ ở trên đường thẳng d song song với OP và cách nó một khoảng  $\frac{m}{2}$ .

Đồng thời M lại phải thuộc quỹ tích trung điểm những dây xuất phát từ P, tức là ở trên cung nhỏ



H.62

OS của đường tròn đường kính OP. Từ đó suy ra ngay cách dựng cát tuyến PAB.

Kẻ bán kính  $IK \perp OP$ .



- Nếu K ở ngoài đường tròn (O) và nếu  $\frac{m}{2} < IK$  thì d cắt đường tròn (I) tại hai điểm M và M', đối xứng nhau qua IK (loại điểm M') và M thỏa mãn khi  $\frac{m}{2} \leq SS'$ .

Giá trị lớn nhất của m là  $2SS'$ , ứng với trường hợp PAB trở thành tiếp tuyến.

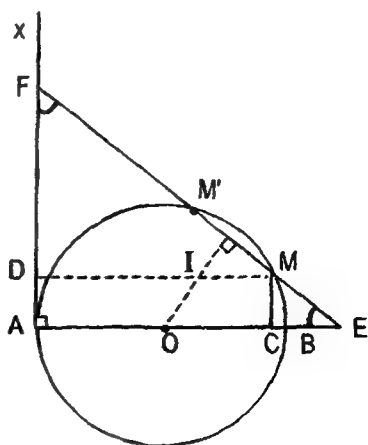
- Nếu K ở ngoài đường tròn (O) thì phải có  $\frac{m}{2} \leq IK$  (bạn đọc tự vẽ hình). Giá trị lớn nhất của m là bằng:  $2IK = OP$ , ứng với vị trí PK của cát tuyến.

**Bài 5.** Giả sử M là điểm đã dựng được, ta phải có  $MC + MD = s$  (hình 63).

Kéo dài AB một đoạn  $CE = CM$  ta được  $AE = s$ . Tam giác MCE là vuông cân nên  $\widehat{E} = 45^\circ$ .

Ta có ngay một nghiệm hình đầu tiên:

Trên AB kéo dài lấy điểm E sao cho  $AE = s$  và góc  $\widehat{AEM} = 45^\circ$ .



H.63

Để khỏi phải dựng góc khiến cho việc biện luận phức tạp, ta lưu ý rằng nếu kéo dài EM cho gặp Ax tại F thì sẽ được tam giác AEF cân. Thành thử chỉ cần đặt đoạn  $AE = AF = s$ , rồi nối EF cắt đường tròn tại điểm M phải tìm.

Muốn EF cắt đường tròn (O) thì khoảng cách  $OI \leq R$ .

Xét hai tam giác vuông đồng dạng EOI và EFA ta có:

$$\frac{OI}{AF} = \frac{EO}{EF} \text{ hay } \frac{OI}{s} = \frac{s-R}{s\sqrt{2}}, \text{ vậy } OI = \frac{s-R}{\sqrt{2}}.$$

Do đó điều kiện trở thành  $\frac{s-R}{\sqrt{2}} \leq R$  hay  $s \leq R + R\sqrt{2}$ .

Ngoài ra EF lại phải cắt (O) giữa E và F. Vậy:

- Nếu  $s > 2R$ , bài toán có 2 nghiệm hình.

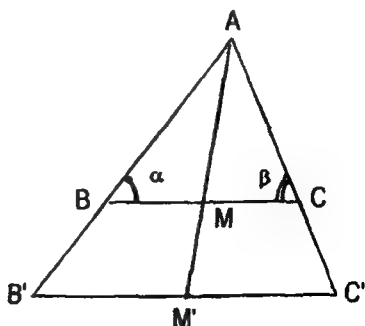
- Nếu  $s < 2R$ , có 1 nghiệm hình.

**Bài 6.** Bỏ qua trung tuyến m thì bài toán sẽ không xác định.

Ta hãy đặt một đoạn BC bất kì và tại B, C dựng các góc  $\alpha, \beta$  (hình 64)

Ta được tam giác ABC đồng dạng với tam giác phải dựng.

Trên trung tuyến AM của tam giác này đặt đoạn  $AM' = m$  rồi kẻ qua  $M'$  đường thẳng song song với BC. Ta được tam giác  $AB'C'$  thoả mãn bài ra.



H.64

Ta luôn dựng được tam giác với điều kiện  $\alpha + \beta < 180^\circ$

Có thể kiểm nghiệm lại là  $M'$  đúng là trung điểm của  $B'C'$  vì  $\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC} = 1$ .

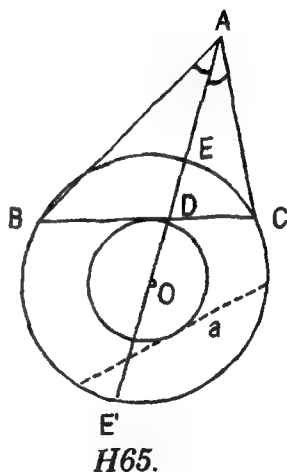
**Lưu ý quan trọng:** Ta có thể vận dụng bài toán này để giải các bài toán mà cùng với các góc cho trước, bài ra cho một trong các điều kiện sau:

- một đường cao;
- một phân giác;
- bán kính đường tròn ngoại tiếp;

- d) bán kính đường tròn nội tiếp hoặc bàng tiếp;  
e) tổng hoặc hiệu hai cạnh;  
g) chu vi.

**Bài 7.** Theo tính chất đường phân giác AD (hình 65) ta có:  

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \text{ hay } \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB+AC}{BD+DC} = \frac{k}{a}$$



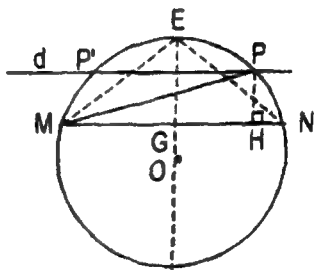
Nếu trước tiên đặt phân giác AD thì các điểm B và C ở trên cùng một đường tròn là quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến hai điểm cố định A và D có giá trị  $\frac{k}{a}$ . Quỹ tích này là đường tròn đường

kinh  $EE'$  trong đó E và  $E'$  là các điểm mà  $\frac{EA}{ED} = \frac{E'A}{E'D} = \frac{k}{a}$ .

Bài toán quy về dựng qua điểm D một dây BC dài a. Ngoài ra D lại phải ở giữa B và C, tức là ở trong đường tròn, điều này đòi hỏi  $\frac{k}{a} > 1$ .

**Bài 8.** Trước hết dựng đoạn  $MN = p$ , rồi dựng cung chứa góc  $\alpha$  trên MN (hình 66).

Dựa theo hệ thức  $bc = 2Rh_a$ , tức là tích hai cạnh của một tam giác bằng tích của đường kính đường tròn ngoại tiếp với đường cao ứng với cạnh thứ ba, ta có:  
 $PM = 2R \cdot PH$ .



H.66



Suy ra  $DF$  song song với tia phân giác góc  $xSy$ .

Ta có cách dựng sau:

Dựng  $DF$  song song với tia phân giác góc  $xSy$  cắt  $d$  ở  $F$ . Từ  $F$  kẻ đường song song với  $Sx$  cắt  $Sy$  tại  $Q$ . Từ  $Q$  kẻ đường thẳng đi qua trung điểm  $E$  của  $CF$  cắt  $Sx$  tại  $P$  phải tìm.

b)  $D$  nằm ngoài đoạn  $SQ$  (hình 67b). Trên  $d$  lấy đoạn  $CE = EF$ . Xét hai tam giác bằng nhau  $\triangle CEP = \triangle FEQ$  (c.g.c). Suy ra  $CP = QF$  và  $CP \parallel QF$ . Do đó tam giác  $QDF$  cân tại  $Q$ . Ta có  $DF$  vuông góc với phân giác  $Sz$  của góc  $xSy$ .

Suy ra cách dựng như sau:

Từ  $D$  kẻ  $DF \perp Sz$  cắt  $d$  ở  $F$ . Từ  $F$  kẻ đường song song với  $Sx$  cắt  $Sy$  ở  $Q$ . Nối  $Q$  với trung điểm  $E$  của  $CF$  cắt  $Sx$  tại  $P$  phải tìm.

**Bài 10.** a) Giả sử  $N$  và  $P$  là hai điểm nằm trên đường tròn  $(O)$  thoả mãn điều kiện  $S$  là trọng tâm của tam giác  $MNP$  (hình 68).

Trung tuyến  $MQ$  qua  $S$  nên  $SM = 2SQ$ . Lại có  $OQ \perp NP$ . Suy ra cách dựng sau:

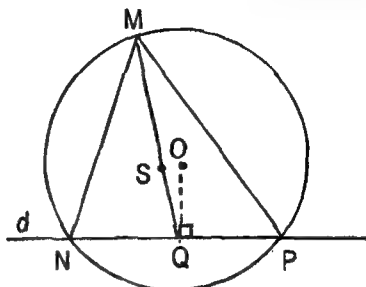
- Kéo dài  $MS$  một đoạn

$$SQ = \frac{1}{2} MS;$$

- Vẽ đường thẳng  $d \perp OQ$  tại  $Q$ ;

- Giao điểm của  $d$  với  $(O)$  cho ta hai điểm  $N$  và  $P$  phải tìm.

Hai điểm  $N$  và  $P$  chỉ xác định được khi  $Q$  được xác định, do đó phải tùy thuộc vào vị trí của  $S$  ở trong  $(O)$ . Bài toán có nghiệm hình khi  $S$  nằm trong đường tròn đường kính  $MS_1 = \frac{2}{3}$  đường kính của  $(O)$ , đồng thời không được nằm trên đường

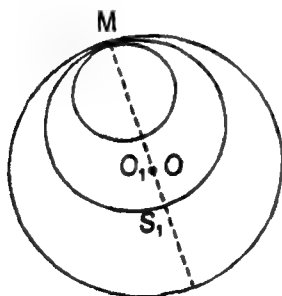


H.68

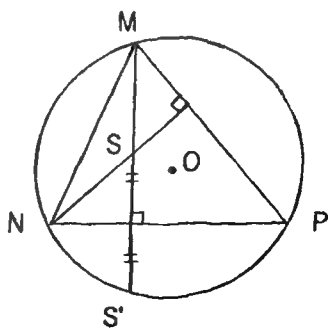
tròn đường kính  $MO_1 = \frac{2}{3}$  bán kính của  $(O)$  (hình 69a, bạn đọc tự nghiên cứu).

Nếu  $Q$  trùng với  $O$  thì đoạn  $OQ$  suy biến thành điểm  $O$ . Khi đó đường thẳng  $d$  qua  $O$  và tam giác  $MNP$  sẽ là tam giác vuông đỉnh  $N$ . Bài toán có vô số nghiệm hình.

b) Giả sử  $N$  và  $P$  đã xác định được trên  $(O)$  và  $S$  là trực tâm của tam giác  $MNP$  (hình 69b).



(a)



(b)

H.69

Dựa vào tính chất: "Trong một tam giác điểm đối xứng của trực tâm  $H$  qua mỗi cạnh đều nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó", ta thấy ngay là điểm  $S'$  đối xứng của  $S$  qua cạnh  $NP$  nằm trên đường tròn  $(O)$  đã cho.

Ta có ngay cách dựng sau:

Nối  $MS$  và kéo dài cắt đường tròn  $(O)$  tại  $S'$ . Dựng đường trung trực của  $SS'$  cắt  $(O)$  tại hai điểm  $N$  và  $P$  phải tìm.

Bài toán luôn có 1 nghiệm hình.

## *Bạn có biết...*

### A. Quỹ tích $pMA^2 + qMB^2 = k^2$

Từ M ta kẻ  $MD \perp AB$  (A, B là hai điểm cố định, p, q là hai số dương). Nối M với một điểm C tùy ý trên AB (hình 70). Theo hai định lý quen thuộc ta có:

$$MA^2 = MC^2 + AC^2 + 2AC \cdot CD \quad (1)$$

$$MB^2 = MC^2 + CB^2 - 2CB \cdot CD \quad (2)$$

Nhân hai vế của (1) với p và của (2) với q rồi cộng từng vế được:

$$\begin{aligned} p \cdot MA^2 + q \cdot MB^2 &= \\ &= MC^2(p+q) + p \cdot AC^2 + q \cdot CB^2 + 2CD(p \cdot AC - q \cdot CB) \quad (*). \end{aligned}$$

Ta xác định điểm C bằng hệ thức  $p \cdot AC - q \cdot CB = 0$  hay  $\frac{CA}{CB} = \frac{q}{p}$ , suy ra  $CA = \frac{aq}{p+q}$ ,  $CB = \frac{ap}{p+q}$ , trong đó  $a = AB$  và

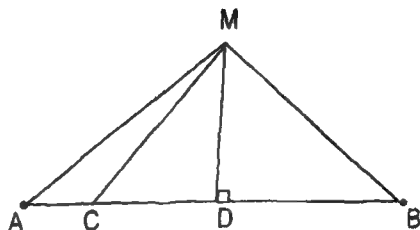
$$p \cdot AC^2 + q \cdot CB^2 = \frac{a^2 q^2 p + a^2 p^2 q}{(p+q)^2} = \frac{a^2 pq}{p+q}.$$

Hệ thức (\*) bây giờ trở thành:

$$k^2 = MC^2(p+q) + \frac{a^2 pq}{p+q}.$$

Điều này chứng tỏ MC là không đổi. Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm C bán kính MC dựng được theo hệ thức cuối này.

Quỹ tích sẽ không tồn



H.70

tại nếu  $k^2 > \frac{a^2 pq}{p+q}$  và suy biến thành một điểm C khi

$$k^2 = \frac{a^2 pq}{p+q}.$$

Khi  $p = q$  ta tìm được một kết quả quen thuộc.

*Lưu ý*

1) Nếu là quỹ tích  $pMA^2 - qMA^2 = k^2$  thì sao?

Ta sẽ lấy một điểm C tùy ý trên AB kéo dài. Ta xác định C bằng cách làm triệt tiêu (như ở phần trên) hệ số của CD và ta sẽ còn tìm được một đường tròn.

Khi p tiến đến q thì bán kính đường tròn này tăng vô hạn và quỹ tích có giới hạn là đường thẳng vuông góc với AB (quỹ tích quen thuộc).

2) Quỹ tích  $p.MA^2 + q.MB^2 = k^2$  là quỹ tích mở rộng của ba quỹ tích cơ bản:

a)  $MA^2 + MB^2 = k^2$  ( $p = q = 1$ )

b)  $MA^2 - MB^2 = k^2$  ( $p = 1, q = -1$ )

c)  $\frac{MA}{MB} = k$  ( $p = 1, q = -k^2, k \neq 0$ ).

3) Quỹ tích tổng quát.

$MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + \dots + MA_n^2 = k^2$  trong đó  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  là n điểm cố định trước, cũng là một đường tròn.

**B. Quỹ tích là trục đẳng phương, tâm đẳng phương**

1) Phương tích

Phương tích của một điểm M đối với một đường tròn  $(O, r)$  là một số bằng  $MO^2 - r^2$ .

Kí hiệu  $P_{M/(O)} = MO^2 - r^2$ .

Rõ ràng:

- Nếu  $P_{M/(O)} > 0$  thì  $MO > r$  và M nằm ngoài đường tròn (O)



- Nếu  $P_{M(O)} < 0$  thì  $MO < r$  và M nằm trong đường tròn
- Nếu  $P_{M(O)} = 0$  thì  $MO = r$  và M nằm trên đường tròn.

2)

**Trục  
đẳng  
phương**

Quy

tích  
những  
điểm có  
cùng

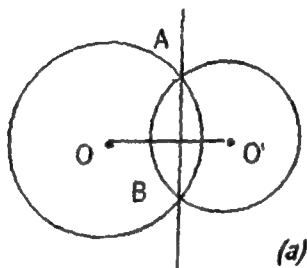
phương tích đối với hai đường  
tròn (O) và (O') là một đường  
thẳng gọi là trục đẳng phương  
của hai đường tròn.

- Trục đẳng phương của (O)  
và (O') vuông góc với  $OO'$ .

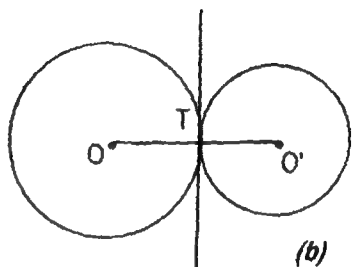
- Nếu (O) và (O') cắt nhau  
tại A và B thì đường thẳng AB  
là trục đẳng phương của hai  
đường tròn (hình 71a).

- Nếu (O) và (O') tiếp xúc nhau  
tại T thì tiếp tuyến chung tại T là  
trục đẳng phương của hai đường  
tròn (hình 71 b,c).

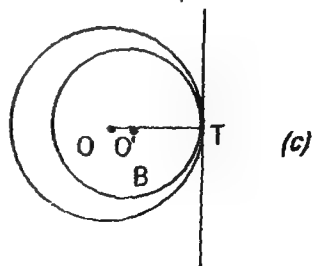
Nếu có ba đường tròn  $O_1, O_2$  và  
 $O_3$  thì điểm S có cùng phương tích  
với ba đường tròn gọi là **tâm đẳng  
phương** của ba đường tròn này  
(hình 72).



(a)

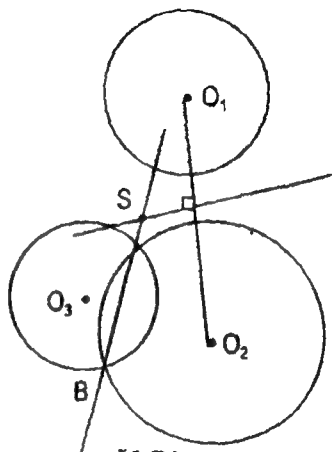


(b)



(c)

H.71



H.72

### 3. Ví dụ

*Ví dụ 1.* Cho hai đường tròn  $(O, r)$  và  $(O', r')$ .

a) Tìm quỹ tích những điểm  $M$  có tổng các phương tích đối với hai đường tròn là một hằng số.

b) Nếu là hiệu các phương tích bằng một hằng số thì sao?

*Cách giải*

a) Ta có  $P_{M/(O)} + P_{M/(O')} = k^2$ , tức là  $MO^2 - r^2 + MO'^2 - r'^2 = k^2$  hay  $MO^2 + MO'^2 = k^2 + r^2 + r'^2$ .

Xét tam giác  $OMO'$  ta có  $2IM^2 + \frac{OO'^2}{2} = k^2 + r^2 + r'^2$  ( $I$  là trung điểm của  $OO'$ ) suy ra

$$2IM^2 = \frac{2(k^2 + r^2 + r'^2) - OO'^2}{2} \quad \text{hay} \quad IM^2 = \frac{2(k^2 + r^2 + r'^2) - OO'^2}{4}.$$

Vậy quỹ tích của  $M$  là đường tròn tâm  $I$  bán kính  $IM$ .

b) Ta có  $P_{M/(O)} - P_{M/(O')} = k^2$ , tức là  $MO^2 - r^2 - (MO'^2 - r'^2) = k^2$  hay  $MO^2 - MO'^2 = k^2 + r^2 - r'^2$ .

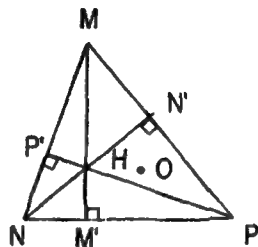
Gọi  $I$  là trung điểm của  $OO'$ , quỹ tích của  $M$  sẽ là đường thẳng vuông góc với  $OO'$  tại điểm  $K$  cách  $I$  một đoạn

$$IK = \left| \frac{k^2 + r^2 - r'^2}{2OO'} \right|.$$

*Ví dụ 2.* Cho tam giác  $MNP$  có ba đường cao  $MM'$ ,  $NN'$ ,  $PP'$  và  $H$  là trực tâm. Tìm điểm  $S$  có cùng phương tích với ba đường tròn có đường kính là các cạnh của tam giác  $MNP$  ( $S$  chính là tâm đẳng phương của ba đường tròn nói trên).

*Cách giải*

Đường tròn đường kính  $NP$  đi qua  $P'$ ,  $N'$  và đường tròn



H.73

đường kính MN đi qua  $N'$ ,  $M'$ . Suy ra  $NN'$  là trục đẳng phương của hai đường tròn này (hình 73).

Tương tự  $MM'$  là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính MN và MP.

Hai trục đẳng phương này đồng quy tại H, trục tâm của tam giác MNP. Vậy trục tâm H là tâm đẳng phương của ba đường tròn có đường kính là các cạnh của tam giác MNP.

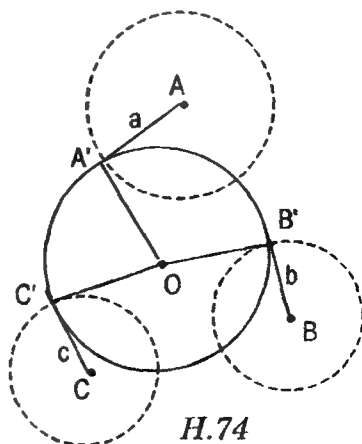
**Ví dụ 3.** Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Dựng đường tròn tâm O sao cho các tiếp tuyến với (O) kẻ từ ba điểm trên có độ dài theo thứ tự bằng a, b, c.

#### Cách giải

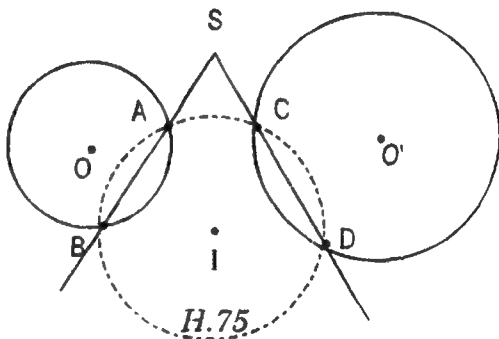
Nếu từ A, B, C ta vẽ các đường tròn  $(A,a)$ ,  $(B,b)$ ,  $(C,c)$  (hình 74) thì chúng cắt đường tròn (O) phải dựng sao cho các bán kính  $OA' \perp AA'$ ,  $OB' \perp BB'$ ,  $OC' \perp CC'$ .

Do  $OA' = OB' = OC'$  nên điểm O có cùng phương tích đối với ba đường tròn, tức là O là tâm đẳng phương của  $(A,a)$ ,  $(B,b)$  và  $(C,c)$ .

Bài toán chỉ có 1 nghiệm hình nếu O ở



H.74



H.75

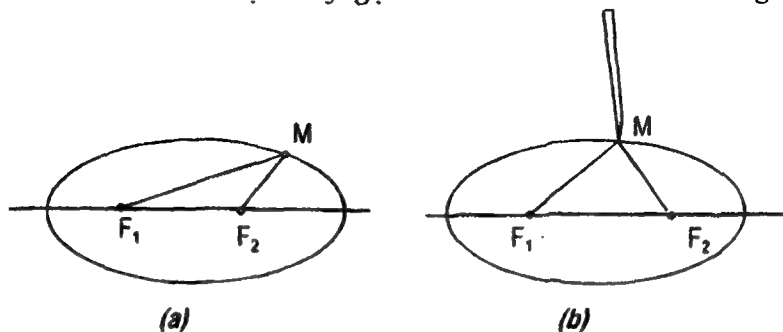
ngoài ba đường tròn để có thể xác định bán kính của đường tròn (O) bởi tiếp tuyến  $OA'$ .

**Lưu ý:** Muốn dựng nhanh trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O') không có điểm nào chung (ngoài nhau) ta chỉ cần dựng một đường tròn thứ ba (I) cắt (O) và (O') tại A, B và C, D (hình 75). Từ giao điểm S của hai trục đẳng phương AB và CD ta kẻ đường vuông góc với  $OO'$ , đường vuông góc này chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O').

### C. Elip - Hypebol - Parabol

**1. Elip.** Quỹ tích những điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến hai điểm cố định  $F_1$  và  $F_2$  bằng một số không đổi  $2a$  (lớn hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy) là một *elip* (hình 76a).

Hai điểm cố định ấy gọi là hai *tiêu điểm*. Khoảng cách



H.76

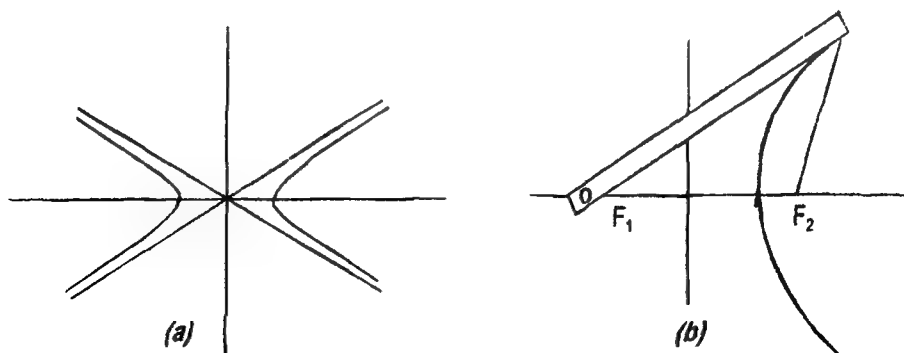
giữa hai tiêu điểm gọi là *tiêu cự*.

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

Muốn vẽ một elip ta dùng một sợi dây có chiều dài  $2a$ , đính hai đầu dây ở hai điểm  $F_1, F_2$  cố định ( $2a > F_1F_2$ ).

Dùng một bút chì căng dây ra và di chuyển bút chì sao cho dây luôn căng thì đầu bút chì sẽ vạch nên một elip (hình 76b).

**2. Hypebol.** Quỹ tích những điểm  $M$  sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ đó đến hai điểm cố định  $F_1$  và  $F_2$  bằng một số không đổi  $2a$  (nhỏ hơn khoảng cách giữa hai điểm ấy) là một *hypebol* (hình 77a).



H.77

Hai điểm cố định ấy gọi là hai *tiêu điểm*, khoảng cách giữa hai tiêu điểm gọi là *tiêu cự*.

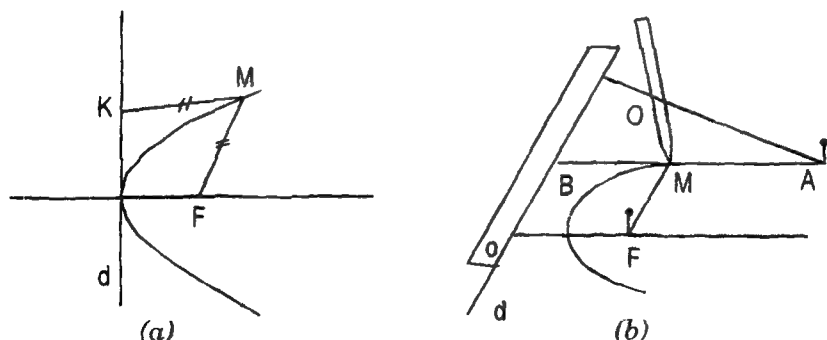
Muốn vẽ một *hypebol* ta lấy một cái thước có chiều dài  $l$  và một sợi dây có chiều dài  $l - 2a$ . Một đầu mút của thước quay quanh điểm  $F_1$ , đầu mút kia của thước dính với một đầu của sợi dây. Đầu dây kia dính ở điểm  $F_2$  ( $2a < F_1F_2 < l$ ).

Dùng một bút chì căng dây cho sát vào thước thì bút chì sẽ vạch nên một phần của một nhánh của *hypebol* (hình 77b).

**3. Parabol.** Quỹ tích những điểm  $M$  sao cho khoảng cách từ đó đến một điểm cho trước  $F$  bằng khoảng cách từ đó đến một đường thẳng  $d$  cho trước là một *parabol* (hình 78a).

Điểm  $F$  gọi là *tiêu điểm*, đường thẳng  $d$  gọi là *đường chuẩn*  $MF = MK$ .

Muốn vẽ một parabol, ta đặt một thước bẹt theo đường chuẩn  $d$ . Cho một êke trượt theo thước bẹt. Một sợi dây có độ dài bằng độ dài cạnh



H.78

$AB$  của êke có một đầu dây dính ở đỉnh  $A$  của êke và đầu dây kia dính ở điểm  $F$ . Một đầu bút chì căng dây sát vào cạnh êke vẽ nên một phần của parabol có tiêu điểm  $F$  và đường chuẩn  $d$  vì ta luôn có  $MF = MB$  (hình 78b).

## MỤC LỤC

|  | <i>Trang</i> |
|--|--------------|
| <b>Vài dòng mở đầu.....</b>  | <b>3</b>     |
| <b>Chương I. MỘT SỐ VẤN ĐỀ CHUNG.....</b>                            | <b>5</b>     |
| - Quỹ tích là gì? .....  | 5            |
| - Các quỹ tích cơ bản .....  | 5            |
| - Các bước giải một bài toán quỹ tích .....                          | 10           |
| - Phương pháp quỹ tích tương giao. ....                              | 15           |
| <b>Chương II.. BÀI TOÁN QUỸ TÍCH (<i>không xét giới hạn</i>)....</b> | <b>19</b>    |
| I. Quỹ tích là đường thẳng, đường tròn.....                          | 19           |
| - 10 bài toán điển hình .....  | 19           |
| - 5 bài toán tự giải. ....   | 32           |
| II. Quan hệ giữa toán quỹ tích và toán dựng hình.....                | 37           |
| - 10 bài toán minh hoạ .....   | 37           |
| <b>Chương III. BÀI TOÁN QUỸ TÍCH (<i>có xét giới hạn</i>) .....</b>  | <b>46</b>    |
| I. Quỹ tích là đoạn thẳng, cung tròn.....                            | 46           |
| 10 bài toán điển hình .....  | 46           |
| 5 bài toán tự giải .....   | 60           |
| II. Quan hệ giữa toán quỹ tích và toán dựng hình.....                | 67           |
| 10 bài toán minh hoạ.....  | 67           |
| <b>Bạn có biết.....</b>  | <b>77</b>    |
| A. Quỹ tích $pMA^2 + qMB^2 = k^2$ .....                              | 77           |
| B. Quỹ tích là trục đẳng phương, tâm đẳng phương...                  | 78           |
| C. Elip, hypebol, parabol. ....                                      | 82           |





***Chịu trách nhiệm xuất bản***

***Giám đốc:***       NGUYỄN VĂN THỎA

***Tổng biên tập:*** NGUYỄN THIÊN GIÁP

***Biên tập và sửa bài:***       TƯỜNG GIANG

***Trình bày bìa:***               THU HÀ

---

**BÀI TOÁN QUỸ TÍCH DỄ HAY KHÓ**

Mã số: 01. 182.ĐH 2001 - 33.2001

In 1000 cuốn tại Công ty Sách và Thiết bị trường học Hải Phòng

Số xuất bản: 337 / 33 / CXB. Số trích ngang 329 KH/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV/2001

